THE

HARIDAS SANSKRIT SERIES

94

THE

CHALANA KALANA PRASHNOTTARA VIVARANA

Edited & Compiled by

Pt. Śrī Achyutānanda Jha

Jyautiṣ'ācharya, Postāchāry, Gold Medalist

* श्री: *

चलनकलनप्रश्नोत्तरविवरणम् ।

ज्योतिषाचार्य-पोथाचार्योदिपदवीकेन प्राप्त"रीपन्"खर्णपदकेन

श्रीअच्युतानन्दझा शर्म्मणा मैथिलेन

विरचितं संशोधितञ्च ।

PUBLISHED BY

JAYA KRISHNA DAS HARIDAS GUPTA

CHOWKHAMBA SANSKRIT SERIES OFFICE

BENARES.

1939

All Rights Reserved by the Publishers.

CHOW. SANS. SERIES OFFICE
Price
Rs. III
BENARES

परिचयः

सुविदितमिथिलादेशे दरभङ्गामण्डलान्तः स्थम् ।
भूषितमतिमतिमद्भि "जैरिसो" नगरं जनैर्मान्यम् ॥ १ ॥
काश्यपकुल-उत्पन्नो-झोपाख्यो मैथिलो मान्यः ।
श्री "गोसाँई" शर्म्मा तत्रासीज्ज्यौतिषे ख्यातः ॥ २ ॥
यावज्जीवनमध्यापन-निरतः स्वाऽयं सततम् ।
तत्तनयाः कीर्त्यतुलाः सर्वजनहितेरताःशश्वत् ॥ ३ ॥
पञ्चाभवन् कनिष्ठ-स्तेषु प्राज्ञो वदान्यश्च ।
ज्योतिःशास्त्रे कुशलः शान्तः स्वच्छाशयो मान्यः ॥ ४ ॥
श्रीमान् "बलदेवो"ऽसौ सर्वजनैकप्रियः ख्यातः ।
तत्तनया-मतिमन्तः सम्भाभूवन् विनीताश्च ॥ ५ ॥
ज्येष्ठः श्री रघुवंश-स्तेष्वतिशान्तः सहृदयश्च ।
तस्मादनुजोऽल्पमतिर्-य"मच्युतानन्द"नामाहम् ॥ ६ ॥
सर्वस्मादनुजः श्रीकीर्त्यानन्दोऽतिमतिमान् वै ।
तस्माज्ज्येष्ठोऽतिबली श्रील-शिवानन्द-नामास्ति ॥ ७ ॥

योऽत्रास्त्यशेषबुधवन्दितपादपद्मः
शान्तो विशुद्धगुणरत्नमहासमुद्रः ।
विद्यालतासमवलम्बनकल्पवृक्षः
आशीशवार्जितयशाः खलु लोकमान्यः ॥ ८ ॥

स "श्रीगेनादिलालो" जयति ममगुरुः साम्प्रतं काशिकायाम्
तस्माल्लब्धोऽवबोधं क्षितिरिपुभुजगग्लौमिते शाकवर्षे ।
साहाय्यं संविधातुं सुविवरणमिदं पाठकानां प्रयत्नात्
भाद्रे शुक्लेदशम्यां रविजनिदिवसे काशिकायामकार्षम् ॥ ९ ॥

चलनकलनप्रश्नोत्तरविवरणम् ।

अथ मङ्गलाचरणम्—

श्रीकालिकामखिलमङ्गलसौख्यदात्रीं ।
देवासुरादिपरिपूजितपादपद्माम् ॥
सृष्टिस्थितित्रयकरीं सुपुमर्थदात्रीं ।
वन्दामहेऽविरतमोक्षपदप्रदात्रीम् ॥ १ ॥
विद्यानिधेर्गुरुवरस्य पदारविन्दं ।
सत्सिद्धिदं सततमङ्गलकल्पवृक्षम् ॥
भक्त्या प्रणम्य क्रियते हि सुदृढजनानां ।
प्रश्नोत्तरं हृदयमुद्विधये बुधानाम् ॥ २ ॥

अथ प्रथमाध्यायस्य प्रश्नानामुत्तराणि ।

तत्र प्रथमप्रश्नोत्तरम्—

(१) यथा $र = ८य + ४$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र यदि $८य + ४ = ल + स्थि$, अर्थात् $ल = ८य$, $४ = स्थि$, तदा प्रथमाध्यायस्य द्वितीयसिद्धान्तेन—

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{तास्थि}{ताय} = \frac{ताल}{ताय},$$

स्थिराङ्कस्य सर्वदैव मानस्थैर्य्यात्तस्य तात्कालिकीगतिः—शून्यसमैव भवतीति नियमात् ।

अथ प्रथमाध्यायप्रथमसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}(८य)}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताय}} \times ८ = ८$ इत्युत्तरम् ।

(२) यदि र, = २ (य + ३) + ३ (य + ४), अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

कल्प्यतेऽत्र य + ३ = ल, य + ४ = व तदा र = २ ल + ३ व, ततः प्रथमाध्यायस्य द्वितीयसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = २ \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + ३ \times \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}(\text{य}+३)}{\text{ताय}} \times २ + \frac{\text{ता}(\text{य}+४)}{\text{ताय}} \times ३$

$= २ (१ + ०) + ३ (१ + ०) = ५$, इत्युत्तरम् ।

(३) यदि र = (७ य + ५) × (५य + २) अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र कल्प्यते ७ य + ५ = ल, ५ य + २ = व, ततः र = ल × व, तदा प्रथमाध्यायस्य तृतीयसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \times \text{व} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ल} = \frac{\text{ता}(७\text{य}+५)}{\text{ताय}} \times (५\text{ य}+२)$

$+ \frac{\text{ता}(५\text{य}+२)}{\text{ताय}} \times (७\text{ य}+५) = (\text{य}\ ३५ + १४) + (\text{य}\ ३५ + २५)$

$= \text{य}\ ७० + ३९$, इत्युत्तरम् ।

(४) $र = \frac{५\text{ य}+३}{१०}$, अत्र तात्कालिकः सम्बन्धकः कः ?

कल्प्यतेऽत्र $\frac{५\text{ य}+३}{१०} = \frac{\text{ल}}{\text{स्थि}}$, तदा प्रथमाध्यायस्य चतुर्थसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \times \text{स्थि} - \frac{\text{तास्थि}}{\text{ताय}} \times \text{ल}$

$= \frac{\text{ता}(५\text{ य}+३)}{\text{ताय}} \times १० - \frac{\text{ता}(१०)}{\text{ताय}} \times (५\text{ य}+३)$

$\frac{५ \times १० - ०}{१००} = \frac{५०}{१००} = \frac{१}{२}$ इत्युत्तरम् ।

अथवान्यप्रकारेणोत्तरम्—(५ य + ३) अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः = ५ हरेण १० अनेन भक्तः सम्पूर्णस्य राशेस्तात्कालिकः सम्बन्धः—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{५}{१०} = \frac{१}{२}$, इत्युत्तरम् ।

(५) $र = \frac{११\text{ य}+७}{१३\text{ य}+११}$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

कल्प्यते ११ य + ७ = ल, १३ य + ११ = व अतः, $र = \frac{\text{ल}}{\text{व}}$, तदा प्रथमाध्यायस्य चतुर्थसिद्धान्तेन— $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \times \text{व} - \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ल}}{\text{व}^२} =$

$\frac{\text{ता}(११\text{ य}+७)}{\text{ताय}} \times (१३\text{य}+११) - \frac{\text{ता}(१३\text{य}+११)}{\text{ताय}} \times (११\text{य}+७)}{(१३\text{ य}+११)^२} =$

$\frac{११(१३\text{ य}+११) - १३(११\text{ य}+७)}{(१३\text{ य}+११)^२} = \frac{१४३\text{ य}+१२१ - (१४३\text{य}+९१)}{(१३\text{ य}+११)^२}$

$= \frac{१४३\text{ य}+१२१ - १४३\text{ य} - ९१}{(१३\text{ य}+११)^२} = \frac{३०}{(१३\text{ य}+११)^२}$, इत्युत्तरम् ।

* अथोदाहरणानामुत्तराणि *

(१) तत्र प्रथमोदाहरणोत्तरम्—

अत्र कल्प्यते चयमानम् = १, आदिमानम् = १, पदप्रमाणम् = य, तदा "व्येकपदघ्नचयोमुख्युक् स्यादन्त्यधनं" इत्यादिपद्येन सर्वधनम् = स = $\frac{य^२ + य}{२}$, अनयोः पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ, $\frac{तास}{ताय} = \frac{ता\,(य^२+य)}{२}$ $= \frac{२य+१}{२}$, अत्र यदि य = ३, इति कल्प्यते तदा $\frac{तास}{ताय} = \frac{२\times३+१}{२} = \frac{७}{२}$। परञ्च तृतीयघटिकान्तं यावत् पुरुषस्य चलनमानं षट्क्रोशमितमस्ति। अतः शेषक्रोशमानम् = १९ − ६ = ९, तत्र शेषक्रोशमानं तृतीयघटिकान्तया गत्यानया $\frac{७}{२}$, चलितम्, अतोऽनुपातेन घटीमानम् = $\frac{१\times९}{\frac{७}{२}} = \frac{१\times९\times२}{७} = \frac{१८}{७} = २ + \frac{४}{७}$, घटीकात्रयमितं पूर्वमेव चलितं, तस्मात्सर्वक्रोशगमने घटीमानम् = ३ + $(२ + \frac{४}{७}) = ९ + \frac{४}{७}$, इत्युत्तरम् ।

(२) द्वितीयोदाहरणोत्तरम्—

कल्प्यतेऽत्रादिः = ३, चयः = २, पदमानम् = य, ततः सर्वधनप्रमाणम् = स = $\frac{(य-१)\cdot च + आ + आ}{२} \times य = \frac{(य-१)\times२+३+३}{२} \times य =$ $य^२ + २य$, पक्षयोस्तात्कालिकौ सम्बन्धौ गृहीतौ तदा जातौ पक्षौ $\frac{तास}{ताय} =$ $२य + २$, अत्रयदि य = ९ तदा $\frac{तास}{ताय} = २०$, अर्थात्नवमदिनान्ते तत्कालिकी गतिः = २०, कश्चित्पुरुषोऽनया गत्या षड्भिर्दिवसैः शत्रुमाक्षोऽतस्तच्चलन-प्रमाणम् = ६ × २० = १२०, नवमदिनान्तं यावत्तत्पुरुषचलनप्रमाणम् = ३ + ५ + ७ + ९ + ११ + १३ + १५ + १७ + १९ = ९९, अतः १११ − ९९ = १२, एतन्मिते शेषे क्रोशे शत्रुः स्वस्थानं परित्यज्य पलायितः । परञ्च दशमदिनादितः षड्दिनानि

यावच्चलनम् = १२०, अतः शत्रोश्चलनमानम् १२० − १२ = १०८, अतः शत्रोर्दिनन्दिनी गतिः = $\frac{१०८}{६}$ = १८ क्रोशाः, इत्युत्तरम् ।

इति प्रथमाध्यायः ।

अथ द्वितीयाध्यायस्य प्रश्नान्तराणामुत्तराणि—

(१) र = $\frac{४\,य^न + ९}{३}$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अस्य ४ $य^न$ + ९, द्वितीयाध्यायस्य प्रथमसिद्धान्तेन तात्कालिकः सम्बन्धः = ४ $य^{न-१}$ इति भवेत्, अर्थं स्थिराङ्केन त्रिमितेन हरेण भक्तोजातः सम्पूर्णस्य तात्कालिकः सम्बन्धः = $\frac{तार}{ताय} = \frac{न.४\,य^{न-१}}{३}$, इत्युत्तरम् ।

(२) र = $\frac{७\,य^७ + ९\,य^५ + ३\,य^३ + य + १९}{८}$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः?

अत्राप्यंशस्य तात्कालिकीं गतिं गृहीत्वा हरेण भाजितः सम्पूर्णस्य तात्कालिकी गतिर्भवेत् । यथांशस्यास्य ७ $य^७ + ९\,य^५ + ३\,य^३ + य + १९$ तात्कालिकीगतिः पूर्वसिद्धान्तबलेन गृहीता तदा, ४९ $य^६ + २५\,य^४ + ९\,य^२ + १$ इति जातोऽयं हरेण भक्तोजातस्तात्कालिकी गतिः—

$= \frac{तार}{ताय} = \frac{४९\,य^६ + २५\,य^४ + ९\,य^२ + १}{८}$, इत्युत्तरम् ।

(३) र = $\frac{७\,य^९ + ११}{९\,य^७ + ९}$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र कल्प्यते ७ $य^९ + ११ = ल$, ९ $य^७ + १ = व$, तदा, र = $\frac{ल}{व}$, प्रथमाध्यायस्य चतुर्थसिद्धान्तेन तात्कालिकीगतिरस्य,

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\times \text{व}-\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\times \text{ल}}{\text{व}^2}=$$

$$\frac{\frac{\text{ता}(७\,\text{य}^6+११)}{\text{ताय}}\times(५\,\text{य}^5+९)-\frac{\text{ता}(५\,\text{य}^5+९)}{\text{ताय}}\times(७\,\text{य}^6+११)}{(५\,\text{य}^5+९)^2}$$

$$=\frac{६३\,\text{य}^6(५\,\text{य}^5+९)-३५\,\text{य}^5(७\,\text{य}^6+११)}{(५\,\text{य}^5+९)^2}=$$

$$\frac{३१५\,\text{य}^{12}+५६७\,\text{य}^6-(२४५\,\text{य}^{11}+३८५\,\text{य}^6)}{(५\,\text{य}^5+९)^2}=$$

$$\frac{७०\,\text{य}^{11}+५६७\,\text{य}^6-३८५\,\text{य}^5}{(५\,\text{य}^5+९)^2}=\frac{\text{य}^5(७०\,\text{य}^6+५६७\,\text{य}^2-३८५\,\text{य})}{(५\,\text{य}^5+९)^2},$$

इत्युत्तरम् ।

(४) $\text{र}=\text{इ}^{\text{इय}}$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

पक्षयोर्लघुरित्थे गृहीते पक्षौ, $\frac{\text{ल}}{\text{इ}}\text{र}=\text{इ}.\ \text{य}.\ \frac{\text{ल}}{\text{इ}}\text{इ}$, अथवा लार $=\text{इ}.\ \text{य}.$ लाइ, तत्र लार, इत्यस्य तात्कालिकः सम्बन्धः $=\frac{\text{ल}}{\text{इ}}\times\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$, तथाऽस्य इ. य. $\frac{\text{ल}}{\text{इ}}\text{इ}$ तात्कालिकी गतिः $=\text{इ}$, अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\times\text{र}=\text{इ}$ अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{र}.\ \text{इ}$, यतः $\text{र}=\text{इ}^{\text{इय}}$, अतः, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{इ}^{\text{इय}}.\text{इ}$, इत्युत्तरम् ।

अथवा-यदि $\text{इ}^{\text{इय}}=\text{इ}^{\text{ल}}$, इति कल्प्यते तदा पक्षयोस्तात्कालिकः सम्बन्धः $=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{इ}^{\text{ल}}\times\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, परञ्चात्र, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=\text{ता}\,(\text{इ}.\ \text{य})=\text{इ}.\ १=\text{इ}$, अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{इ}^{\text{ल}}\text{इ}=\text{इ}^{\text{इ}.\ \text{य}}.\text{इ}$ इत्युक्तम् ।

(५) $\text{र}=\text{ल}_{\text{अ}}\text{य}$ अतः $\text{अ}^{\text{र}}=\text{य}$: कः सम्बन्धः ? द्वितीयाध्यायस्य द्वितीय-सिद्धान्तेन—

$$\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}=\text{अ}^{\text{र}}.\ \text{ल}\ \text{अ},\ \text{वा},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{१}{\text{अ}^{\text{र}}.\ \text{ल}_{\text{इ}}\ \text{अ}}=\frac{१}{\text{य}.\ \text{ल}_{\text{इ}}\text{अ}},\ \text{इत्युक्तम्}\ ।$$

(६) $\text{र}=\text{इ}^{८\text{य}}$, अस्य द्वितीयाध्याय चतुर्थप्रश्नान्तरयुक्त्या तात्कालिकी गतिः $=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=८\text{इ}^{८\text{य}}$ इत्युत्तरम् ।

(७) $\text{र}=\frac{\text{इ}^{७\text{य}}+१}{\text{य}+१}$, अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

कल्प्यते, $\text{इ}^{७\text{य}}+१=\text{ल},\ \text{य}+१=\text{व}$, तद. $\text{र}=\frac{\text{ल}}{\text{व}}$, प्रथमाध्यायस्य चतुर्थ-सिद्धान्तेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\times \text{व}-\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\times \text{ल}}{\text{व}^2},\ \text{उत्थापिते}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=$$

$$\frac{\text{ता}\,(\text{इ}^{७\text{य}}+१)}{\text{ताय}}\times(\text{य}+१)-\frac{\text{ता}\,(\text{य}+१)}{\text{ताय}}\times(\text{इ}^{७\text{य}}+१)}{(\text{य}+१)^2}=$$

$$\frac{\text{इ}^{७\text{य}}+(\text{य}+१)-(\text{इ}^{७\text{य}}+१)}{(\text{य}+१)^2}=\frac{७.\ \text{य}.\ \text{इ}^{७\text{य}}+७\,\text{इ}^{७\text{य}}-\text{इ}^{७\text{य}}-१}{(\text{य}+१)^2}=$$

$$\frac{\text{य}.\ \text{इ}^{७\text{य}}+६\text{इ}^{७\text{य}}-१}{(\text{य}+१)^2}=\frac{\text{इ}^{७\text{य}}(७\,\text{य}+६)-१}{(\text{य}+१)^2},\ \text{इत्युत्तरम्}\ ।$$

(८) $र = ४ \, ल_{इ} \, य$, अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र द्वितीयाध्यायस्य चतुर्थसिद्धान्तेन—

$\frac{तार}{ताय} = ४ \times \frac{१}{य \times ल_{इ} \, इ} = ४ \times \frac{१}{य} = \frac{४}{य}$, इष्टाधारे लघुरिक्थमिष्टस्य कृ-

पसमानत्वात्, $ल_{इ} \, इ = १$, अत उत्तरम् $= \frac{४}{य}$ इति जातम् ।

(९) $र = \frac{ल_{इ} \, य}{य - ३}$, अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्रापि यदि कल्प्यते $ल_{इ} \, य = ल$, । $य - ३ = व$, तदा $र = \frac{ल}{व}$, ततः प्रथ-

माध्यायस्य चतुर्थसिद्धान्तेन—

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{\frac{ताल}{ताय} \times व - \frac{ताव}{ताय} \times ल}{व^२} = \frac{\frac{१}{य}(य-३) - १ \times ल_{इ} \, य}{(य-३)^२} =$$

$$\frac{१}{य(य-३)} - \frac{ल_{इ} \, य}{(य-३)^२}$$, इत्युत्तरम् ।

(१०) $र = \frac{ल_{इ} \, य}{इ^{य}}$, अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

$$\text{पूर्ववत् } \frac{तार}{ताय} = \frac{\frac{ताल}{ताय} \times व - \frac{ताव}{ताय} \times ल}{य^२} =$$

$$\frac{\frac{१}{य} \times इ^{य} \cdot य \cdot इ^{य} \times ल_{इ} \, य}{(इ^{य})^२} = \frac{१}{य \cdot इ^{य}} - \frac{य \cdot ल_{इ} \, य}{इ^{य}}$$

इत्युत्तरम् ।

❀ अथ प्रथमोदाहरणोत्तरम् ❀

(१) तन्त्रालापानुसारेण $र = (१० + य)^२$ अत्रचेत् कल्प्यते $१० + य = ल$, तदा $र = ल^२$, ततस्तात्कालिकगतिग्रहणेन— $\frac{तार}{ताय} = २ \, ल \, \frac{ताल}{ताय}$, यतः ल-

$= १० + य$, अतः, $\frac{ताल}{ताय} = १$ अतः, $\frac{ताव}{ताय} = २ \, (१० + य)$, अत्र यदि $य =$

४ तदा चतुर्थवर्षान्ते $\frac{तार}{ताय} = २ \, (१० + ४) = २८$, इदं चतुर्थवर्षान्तसम्बन्धि-

नयं १९६ अस्मिन् संयोज्यते तदा चतुर्थवर्षान्तधनवृद्धिगत्या पञ्चमवर्षान्ते धन-

मानम् १९६ + २८ = २२४ । परञ्च पूर्वव्यवस्थया धनम् = २२९, अतस्तयो-

रन्तरेण जातमन्तरधनमानम् = १, इत्युत्तरम् ।

(२) अत्राध्यालापानुसारेण, $र = १०^{य}$, ततो द्वितीयाध्यायस्य द्वितीय-

सिद्धान्तेन—

$\frac{तार}{ताय} = १० \cdot य \cdot ल_{इ} \, १०$, अत्र चेत् $य = ३$, तदा तृतीय वर्षान्ते $\frac{तार}{ताय} =$

$१०^{१}, ^{००} \, ल_{इ} \, १०$, परञ्च $ल_{इ} \, १० = २ \cdot ३०२९$, अतः $\frac{तार}{ताय} = १००० \times २ \cdot ३०२९$

$= २३०२ \cdot ९$, अनेनान्वितं तृतीयवर्षान्तधनं जातं चतुर्थवर्षान्ते धनमानम् =

$२३०२ \cdot ९$, इत्युत्तरम् ।

इति द्वितीयाध्यायः ।

अथ तृतीयाध्यायस्य प्रश्नानामुत्तराणि ।

(१) $र = क. \sqrt[३]{य}$ अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र $क. \sqrt[३]{य} = क. \, य^{\frac{१}{३}}$, ततः द्वितीयाध्यायस्य (१) सिद्धान्तेन—

$\frac{तार}{ताय} = क. \, \frac{१}{३} \, य^{\frac{१}{३} - १} = क. \, \frac{१}{३} \cdot य^{-\frac{२}{३}}$, परञ्च $य^{-\frac{२}{३}} = \frac{१}{\sqrt[३]{य^२}}$

एतत्सर्वं बीजगणितं विलोक्यम् । तदा $\frac{तार}{ताय} = क. \, \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{\sqrt[३]{य^२}}$ इत्युत्तरम् ।

(२) $र = ग\left(\sqrt{य} + \sqrt[3]{य}\right)$, अत्रापि पूर्वयुक्त्यैव $\frac{तार}{ताय} =$

$ग\left(\frac{1}{2}य^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}य^{\frac{1}{3}-1}\right) = ग\left(\frac{1}{2}\sqrt{य}^{-1} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{य}^{-2}\right) =$

$ग\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{य}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{य^2}}\right)$ इत्युत्तरम् ।

(३) $र = क$ (ज्याय + कोज्याय), अत्र तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

अत्र कल्प्यते ज्याय = ल, कोज्याय = व, तदा $र = क$ (ल + व) पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन, $\frac{तार}{ताय} = क\left(\frac{ताल}{ताय} + \frac{ताव}{ताय}\right) =$

क (ज्याय—कोज्याय), यतः, $\frac{ताल}{ताय} =$ —कोज्याय । $\frac{ताव}{ताय} =$ ज्याय, एतदर्थं द्वितीयाध्यायस्य चतुर्थपञ्चमसिद्धान्तौ विलोक्यावित्युत्तरम् ।

(४) $र = क$ (छेय + स्पय), अत्र कः-सम्बन्धः ? अत्रापि प्रथमाध्यायस्य द्वितीयसिद्धान्तेन—

$\frac{तार}{ताय} = क\left\{\text{ता (छेय)} + \text{ता (स्पय)}\right\}$, ततो द्वितीयाध्यायस्य षष्ठाष्टमसिद्धान्ताभ्यां $\frac{तार}{ताय} = \left(\frac{स्पय}{कोज्याय} + छे^2य\right) \times क =$

$क\left(\frac{स्पय}{कोज्याय} + \frac{त्रि^2}{काज्या^2य}\right) = क\left(\frac{ज्याय}{कोज्याय^2} + \frac{1}{काज्या^2य}\right) =$

$क\left(\frac{ज्याय + 1}{कोज्या^2य}\right)$, इत्युत्तरम् ।

(५) यदि $र = क$ (कोछेय + छेय), तात्कालिकसम्बन्धः कः ? तदाऽत्रापि पूर्वयुक्त्यैव $\frac{तार}{ताय} = क\left(\frac{स्पय}{काज्याय} - \frac{कोज्याय}{ज्याय}\right)$, इत्युत्तरम् ।

(६) यदि $र = ($ ज्या^{2}य + कोज्या^{2}य) क, अत्र तात्कालिकी गतिः का ? यतः ज्या^{2}य + कोज्या^{2}य = १, अतः $र = १ \times क$, पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन, $\frac{तार}{ताय} = ० \times क = ०$ इत्युत्तरम् ।

(७) $र = \frac{१}{क}$ (स्पय × कोस्पय + १), कस्तात्कालिकसम्बन्धः ?

पूर्वसिद्धान्तबलादेवात्रापि—

$\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{क}$ (छे^{2}य · कोस्पय—कोछे^{2}य · स्पय) =

$\frac{१}{क}\left(\frac{त्रि^2 \text{ कोज्याय}}{काज्या^2य \cdot ज्याय} - \frac{त्रि^2 \cdot ज्याय}{ज्या^2य \cdot कोज्याय}\right) =$

$\frac{१}{क}\left(\frac{त्रि^2}{काज्याय \cdot ज्याय} - \frac{त्रि^2}{ज्याय \cdot कोज्याय}\right) =$

$\frac{१}{क} \times ० = ०$, इत्युत्तरम् ।

(८) $र = ग$ (छे^{2}य—स्प^{2}य), अस्यतात्कालिकसम्बन्धः कः ? यतः छे^{2}य—स्प^{2}य = १, अतः $र = १ \times ग$ अतः

$\frac{तार}{ताय} = ०$ इत्युत्तरम् ।

(९) $र = घ$ (स्पय · कोस्पय + छे^{2}य—स्प^{2}य), कः सम्बन्ध ? यस्यास्य स्पय · कोस्पय तात्कालिकसम्बन्धः-शून्यमितोभवतीति पूर्वं सिद्धः । तथा छे^{2}य—स्प^{2}य = १, अस्यापि शून्यमितैव तात्कालिकी गतिस्तेन—

$\frac{तार}{ताय} = ०$, इत्युत्तरम् ।

(१०) यदि र = घ ज्या $\left(\frac{य^२+३}{३य+१}\right)$, अस्य तात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

यत्र कल्प्यते $\frac{य^२+३}{३य+१}$ = ल । तदा र = घ · ज्याल,

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = घ · कोज्याल · $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, परञ्च

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ = ता $\left(\frac{य^२+३}{३य+१}\right)$ = $\frac{२य(३य+१)-३(य^२+३)}{(३य+१)^२}$ =

$\frac{६य^२+२य-३य^२-९}{(३य+१)^२}$ = $\frac{३य^२+२य-९}{(३य+१)^२}$, अतः

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = घ · कोज्याल · $\left(\frac{३य^२+२य-९}{(३य+१)^२}\right)$ =

घ · कोज्या $\left(\frac{य^२+३}{३य+१}\right) \times \left(\frac{३य^२+२य-९}{(३य+१)^२}\right)$, इत्युत्तरम् ।

(११) यदि र = क · कोज्या $\left(\frac{य+९}{य+७}\right)$, अस्य तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

अत्रापि यदि कल्प्यते $\left(\frac{य+९}{य+७}\right)$ = ल, तदा र = क · कोज्याल,

तदा $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = क · ज्याल · $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, परञ्च, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ =

$\frac{य+०-(य+९)}{(य+७)^२}$ = $\frac{२}{(य+७)^२}$, अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ =

क · ज्या $\left(\frac{य+९}{य+७}\right) \times \frac{२}{(य+७)^२}$, इत्युत्तरम् ।

(१२) यदि र = क · स्प $\left(\frac{य+४}{९}\right)$,

कल्प्यतेऽत्रापि, ल = $\left(\frac{य+४}{९}\right)$, तदा र = क · स्पल, अतः

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = क · छे^{२}ल · $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, अत्र $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{९}{२९} = \frac{१}{९}$,

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = क · छे^{२}ल · $\frac{१}{९}$, इत्युत्तरम् । ?

(१३) यदि र = क · कोस्प $\left(\frac{य+३}{२}\right)$, ?

कल्प्यते र = क · कोस्पल, ततः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = क · कोछे^{२}ल · $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ =

क · कोछे^{२} $\left(\frac{य+३}{२}\right)$ · $\left(\frac{१}{२}\right)$ इत्युत्तरम् ।

(१४) यदि र = क · स्प$^{-१}$ (य+७), कः सम्बन्धः ?

अत्रापि र = क · स्प$^{-१}$ल, ततस्तृतीयाध्यायस्य तृतीयसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = क · $\frac{१}{१+ल^२} \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ = क · $\frac{१}{१+ल^२}$ =

क · $\frac{१}{१+(य+७)^२}$ = क × $\frac{१}{य^२+१४य+५०}$, इत्युत्तरम् ।

(१५) यदि र = कोज्या$^{-१}$ $\left(\frac{य^२+१}{९}\right)$ = कोज्या$^{-१}$ल, ?

तदा तृतीयाध्यायस्य द्वितीयसिद्धान्तेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१-ल^२}} \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१-\frac{य^४+२य^२+१}{२९}}} \times \frac{९ \times २य}{२९} =$

$\frac{२य}{\sqrt{-य^४-२य^२+२४}}$, इत्युत्तरम् ।

$$\frac{(य^२-३य-१)}{(य^२+य-२)\times\left(\sqrt{य^४+२य^३-४य^२+२य-५}\right)\times(य-३)^२}=$$

$$\frac{(य^२-६य-१)}{(य^२+य-२)\sqrt{य^४+२य^३-४य^२+२य-५}}$$, इत्युत्तरम् ।

(२०) यदि $र=कोछे^{-१}\left(\frac{२य^२+य}{३य+५}\right)=कोछे^{-१}ल$,

तदा (३ अ. ४ सि.) $\frac{तार}{ताय}=\frac{१}{ल\sqrt{ल^२-१}}\times\frac{ताल}{ताय}=$

$$\frac{१}{\frac{२य^२+य}{३य+५}\times\frac{\sqrt{४य^४+४य^३+य^२}}{९य^२+३य+२५}}\times$$

$$\frac{(४य+१)(३य+५)-३(२य^२+य)}{(३य+५)^२}$$

$$=\frac{१}{\frac{२य^२+य}{३य+५}\times\frac{\sqrt{४य^४+४य^३+य^२-(९य^२+३०य+२५)}}{(३य+५)^२}}\times$$

$$\frac{६य^२+२०य+५}{(३य+५)^२}$$

$$=\frac{६य^२+२०य+५}{(२य^२+य)\sqrt{(४य^४+४य^३+य^२)-(९य^२+३०य+२५)}}$$, इत्युत्तरम्।

(२१) यदि $र=उज्या\left(य^२+\frac{१}{७}\right)=उज्याल$, तदात्र (२ अ १० सि.),

$\frac{तार}{ताय}=ज्याल\times\frac{ताल}{ताय}=ज्या\left(य^२+\frac{१}{७}\right)\times२य$, इत्युत्तरम् ।

(२२) यदि $र=कोउज्या\left(य^३+\frac{१}{१६}\right)=कोउज्याल$ ततः,(२ अ १० सि.)

$\frac{तार}{ताय}=\frac{कोज्याल}{ल}\times\frac{ताल}{ताय}=\frac{कोज्या\left(य^३+\frac{१}{१६}\right)}{१}\times३य^२=$

$ज्या\left(य^३+\frac{१}{१६}\right)\times३य^२$, इत्युत्तरम् ।

(२३) यदि $र=उज्या^{-१}\left(\frac{१}{य+२}\right)=उ.ल$, तदा (३ अ २ सि.)

$\frac{तार}{ताय}=\frac{१}{\sqrt{२ल-ल^२}}\times\frac{ताल}{ताय}=\frac{१}{\sqrt{\frac{२}{य+२}-\frac{१}{य^२+४य+४}}}\times$

$\frac{१}{(य+२)^२}=\frac{१}{\sqrt{\frac{२य^२+८य+८-(य+२)}{(य+२)(य+२)^२}}}\times\frac{-१}{(य+२)^२}=$

$\frac{१}{\sqrt{\frac{य^२+३य+५}{य+२}}\times\frac{१}{य+२}}\times\frac{-१}{(य+२)^२}=$

$\frac{-१}{\sqrt{\frac{य^२+३य+५}{य+२}}\times(य+२)}=\frac{-१}{\sqrt{\frac{(य+२)(य+३)}{य+२}}\times(य+२)}$

$\frac{-१}{\sqrt{य+३}\times(य+२)}$, इत्युत्तरम् ।

(२४) यदि र = कोउज्या$^{-1}\left(\frac{य+१}{य+२}\right)$ = कोउज्या$^{-1}$ ल, तदा (३ अ. ५ वि.)

$$\frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{\sqrt{२ल-ल^२}} \times \frac{ताल}{ताय} = -\frac{१}{\sqrt{\left(\frac{य+१}{य+२}\right) \times २ - \left(\frac{य+१}{य+२}\right)^२}}$$

$$\times \frac{(य+२)-(य+१)}{(य+२)^२} = -\frac{१}{\sqrt{\frac{(य^२+२)(य+२)}{(य+२)^२} - \frac{य^२+२य+१}{(य+२)^२}}}$$

$$\times \frac{१}{(य+२)^२} = -\frac{१}{\sqrt{\frac{२य^२+६य+४-य^२-२य-१}{(य+२)}}} \times \frac{१}{(य+२)^१} =$$

$$-\frac{१}{(\sqrt{य^२+४य+३}) \times (य+२)}, \text{ इत्युत्तरम्।}$$

(२५) यदि र = $\left(\frac{य+२}{४}\right)^४$, ततोऽनयोस्तात्कालिकगतिग्रहणेन—

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{४}{१} \times ४ \left(\frac{य+२}{४}\right)^३ = \left(\frac{य+२}{४}\right)^३, \text{ इत्युत्तरम्।}$$

(२६) यदि र = $(य+२)^३ \times (य^२+३)^४$, कल्प्यतेऽत्र $य+२ = व$, $(य^२+३) = व$, तदा र = $ल^३ \times व^४$, ततः प्रथमाध्यायतृतीयसिद्धान्तेन—

$$\frac{तार}{ताय} = ३ल^२ \cdot \frac{ताल}{ताय} \cdot व^४ + ५व^४ \cdot \frac{ताव}{ताय} \cdot ल^३ = ३ (य+२)^२ \times$$

$$१ \times (य^२+३)^४ + ५ (य^२+३)^४ \times २य \times (य+२)^३ =$$

$$३ (य+२)^२ \times (य^२+३)^४ + १० य (य^२+३)^४ \times (य+२)^३ =$$

$$\left\{(य+२)^२ \times (य^२+३)^४\right\} \cdot \left\{३(य^२+३) + १०य(य+२)\right\} =$$

$$\left\{(य+२)^२ \times (य^२+३)^४\right\} \cdot \left\{३य^२+९+१०य^२+२०य\right\} =$$

$$\left\{(य+२)^२ \times (य^२+३)^४\right\} \cdot \left\{१३य^२+२०य+९\right\}, \text{ इत्युत्तरम्।}$$

(२७) यदि र = $\sqrt{२य+७} = (२य+७)^{\frac{१}{२}}$, तदा पूर्वसिद्धान्तबलेन—

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}(२य+७)^{-\frac{१}{२}} = \frac{१}{\sqrt{२य+७}}, \text{ इत्युत्तरम्।}$$

(२८) यदि र = $\left(\frac{य+३}{य-१}\right)^{\frac{५}{७}}$, अत्रापि पूर्वसिद्धान्तबलेन $\frac{तार}{ताय}$ =

$$\frac{५}{७}\left(\frac{य+३}{य-१}\right)^{-\frac{२}{७}} \times \frac{-४}{(य-१)^२} = -\frac{२०}{७} \times \left(\frac{य+३}{य-१}\right)^{-\frac{२}{७}} +$$

$(य-१)^२$, इत्युत्तरम्।

(२९) यदि र = २ (य+२) + ३ ($य^२+५$) = २ल + ३व, [illegible] $\frac{तार}{ताय} = २ \times \frac{ताल}{ताय} + ३ \times \frac{ताव}{ताय}$

= २ + ३ ($२य^१$) = ९ $य^२$ + २, इत्युत्तरम्।

(३०) यदि र = $\frac{८}{य+५} + \frac{९}{य+६} - \frac{११}{य^२+११य+३०}$,

[illegible] $\frac{तार}{ताय} = -\frac{८}{(य+५)^२} - \frac{९}{(य+६)^२} +$

$$\frac{११(२य+११)}{(य^२+११य+३०)^२} = \frac{२२य+१२१}{(य^२+११य+३०)^२} - \frac{८य^२+९६य+२८८}{(य^२+११य+३०)^२}$$

$$\frac{३य^२+१५य+२२५}{(य^२+११य+३०)^२} = -\frac{(१७य^२+१६४य+३९२)}{(य^२+११य+३०)^२}, \text{ इत्युत्तरम्।}$$

(३१) यदि $र = अ^{अय} + य$, तदा द्वितीयाध्यायस्य द्वितीयसिद्धान्तेन

$\frac{तार}{ताय} = ल_{इ} अ \cdot अ - अ^{अय} + १$, इत्युत्तरम् ।

(३२) यदि $र = अय \times अ^{अय}$, तदा (१ अ. ३ सि.) $\frac{तार}{ताय} =$

$अ \cdot १ \times अ^{अय} + ल_{इ} अ \times अ \cdot अ^{अय} \times अय = (ल_{इ} अ \times अ - य + १) \times$

$अ \cdot अ^{अय}$, इत्युत्तरम् ।

(३३) यदि $र = \frac{अय^{१}}{य}$, अतः $य \cdot र = अय^{१}$, पक्षयोर्लघुरिक्थ

ग्रहणेन $ल_{अय} र = य^{१}$ । परञ्च $ल_{अय} र = ल_{अ} य + ल_{अ} र$, लघुरिक्थ

गणितं विलोक्यम् । अतः $य^{१} = ल_{अ} य + ल_{अ} र$, अनयोस्तात्कालिकस्य

स्वग्रहणेन $\frac{१}{य^{२}} = \frac{१}{य \times ल_{इ} अ} \times १ + \frac{१}{र \times ल_{इ} अ} \times \frac{तार}{ताय}$,

अतः $\frac{१}{र \times ल_{इ} अ} \times \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य^{२}} - \frac{१}{य \times ल_{इ} अ} =$

$\frac{ल_{इ} अ}{य^{२} ल_{इ} अ} - \frac{य}{य^{२} \cdot ल_{इ} अ} = - \frac{ल_{इ} अ + य}{य^{२} \cdot ल_{इ} अ}$, अतः $\frac{तार}{ताय} =$

$\frac{(ल_{इ} अ + य) - र \cdot ल_{इ} अ}{य^{२} \times ल_{इ} अ} = \frac{(ल_{इ} अ + य) र}{य^{२}}$, इत्युत्तरम् ।

(३४) यदि $र = \frac{अ^{कय}}{कय} = \frac{ल}{व}$, तदा $\frac{तार}{ताय} =$

$\frac{ताव}{ताय} \times ल \quad अ^{कय} \times ल_{इ} अ \times क \times कय - क \cdot अ^{कय}$

$\frac{}{य^{२}} = \frac{}{क^{२} य^{२}} =$

$(\frac{ल_{इ} अ \times कय - १}{क^{२} य^{२}})$, इत्युत्तरम् ।

(३५) यदि $र = ल_{इ} (य^{२} + ११)$, अथात्र कल्प्यते $(य^{२} + ११) =$

$व$, तदा $र = ल_{इ} व$, ततस्तात्कालिकगतिग्रहणेन $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{व} \times \frac{ताव}{ताय} =$

$\frac{१}{य^{२} + ११} \times २य = \frac{२य}{य^{२} + ११}$, इत्युत्तरम् ।

(३६) यदि $र = \frac{अय}{अ^{अय}} = \frac{ल}{व}$, तदा $\frac{तार}{ताय} =$

$\frac{ताव}{ताय} \times ल$

$\frac{}{य^{२}} =$

$अ^{अय} - अ \cdot ल_{इ} अ \cdot अ^{अय} \times अय$

$\frac{}{(अ^{अय})^{२}} =$

$अ (१ - अय \cdot ल_{इ} अ)$

$\frac{}{अ^{अय}}$, इत्युत्तरम् ।

(३७) यदि $र = \frac{रूपअय}{अ^{रूपअय}}$, अतः $\frac{रूपअय}{र} =$

अय लघुरिक्थग्रहणेन प्रथमपक्षः

$ल_{अ}\frac{(रूपअय)}{र} = ल_{अ}रूपअय - ल_{अ}र$,लघुरिक्त्थगणितं विलोक्यम् ।

द्वितीयपक्षस्यास्य= $अ^{रूपअय}$, लघुरिक्त्थं रूपअय, इति स्यात् ।

अनयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ तुल्यावतः—

$\frac{१}{ल_{इ}अ \times रूपअय} \times छे^{२}अय \times अ - \frac{१}{र \cdot ल_{इ}अ} \times \frac{तार}{ताय} =$

$छे^{२}अय \cdot अ$, अतः $\frac{१}{ल_{इ}अ \times रूप अय} \times छे^{२}अय \cdot अ - छे^{२}अय \cdot अ =$

$\frac{१}{र \cdot ल_{इ}अ} \times \frac{तार}{ताय} = छे^{२}अय \cdot अ$, अतः $\frac{तार}{ताय} = र \cdot ल_{इ}अ \times$

$\left\{ \frac{१}{ल_{इ}अ \cdot रूपअय} \times छे^{२}अय \cdot अ - छे^{२}अय \cdot अ \right\}$

$= \frac{र}{रूपअय} \times छे^{२}अय \cdot अ - र \cdot ल_{इ}अ \times छे^{२}अय \cdot अ =$

$= \frac{र \cdot छे^{२}अय \cdot अ - र \cdot ल_{इ}अ \times छे^{२}अय \cdot अ \cdot रूपअय}{रूपअय}$

$\frac{र \cdot छे^{२}अय \cdot अ (१ - ल_{इ}अ \times रूपअय)}{रूपअय}$,इत्युक्तम् ।

(३८) यदि $र = कोज्याय \cdot य^{ज्याय}$, अतः $य^{ज्याय} = \frac{र}{कोज्याय}$,

अनयोर्लघुरिक्त्थग्रहणेन $ज्याय \cdot ल_{इ}य = ल_{इ}र - ल_{इ}कोज्याय$, अन-

योस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन $-कोज्याय \cdot ल_{इ}य + \frac{ज्याय}{य} =$

$\frac{१}{र} \times \frac{तार}{ताय} - \frac{१}{कोज्याय} \times$ ज्याय, पक्षौ कोज्याय, अनेन गुणितौ—

$-कोज्या^{२}य \cdot ल_{इ}य + \frac{२ कोज्याय \cdot ज्याय}{२ य} =$

$\frac{कोज्याय}{र} \times \frac{तार}{ताय} +$ ज्याय ।

वा,$-कोज्या^{२}य \cdot ल_{इ}य + \frac{ज्या २ य}{२ य} =$

$\frac{कोज्याय}{र} \times \frac{तार}{ताय} +$ ज्याय,

अतः ज्याय—$कोज्या^{२}य \cdot ल_{इ}य + \frac{ज्या २ य}{२ य} =$

$\frac{कोज्याय}{र} \times \frac{तार}{ताय}$,

अतः $\frac{तार}{ताय} = \frac{र}{कोज्याय} \times \left(ज्याय - कोज्या^{२}य \cdot ल_{इ}य + \frac{ज्या २ य}{२ य} \right)$

परञ्चात्र $\frac{र}{कोज्याय} = य \cdot य^{ज्याय}$,

अतः $\frac{तार}{ताय} = य^{ज्याय} \times \left(ज्याय - कोज्या^{२}य \cdot ल_{इ}य + \frac{ज्या २ य}{२ य} \right)$,

इत्युत्तरम् ।

(३९) यदि $र = \left(\frac{य}{ज्याय} \right)^{\frac{य}{ज्याय}}$, पक्षयोर्लघुरिक्त्थ ग्रहणेन—

$\frac{य}{ज्याय} \times ल_{इ}\frac{य}{ज्याय} = ल_{इ}र$,

अथ पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ गृहीतौ तदा जातौ पक्षौ—

$\frac{ता(य) \cdot ज्याय - ता(ज्याय) \cdot य}{ज्या^{२}य} \times ल_{इ}\left(\frac{य}{ज्याय} \right)$

$$+ \text{ता}\left\{ \text{ल}_{\text{इ}}\left(\frac{\text{य}}{\text{ज्याय}}\right)\right\} \times \text{ता}\left(\frac{\text{य}}{\text{ज्याय}}\right) \times \frac{\text{य}}{\text{ज्याय}} = \text{ता}\left(\text{ल}_{\text{इ}}\text{र}\right),$$

अथवा, $\frac{\text{ज्याय}-\text{कोज्याय}\cdot\text{य}}{\text{ज्या}^2\text{य}} \times \text{ल}_{\text{इ}}\left(\frac{\text{य}}{\text{ज्याय}}\right) +$

$$\frac{\frac{1}{\text{य}}}{\text{ज्याय}} \times \frac{\text{ज्याय}-\text{कोज्याय}\cdot\text{य}}{\text{ज्या}^2\text{य}} \times \frac{\text{य}}{\text{ज्याय}} = \frac{1}{\text{र}} \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},$$

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{र}\left(\frac{\text{ज्याय}-\text{कोज्याय}\cdot\text{य}}{\text{ज्या}^2\text{य}}\right)$

$\times \left\{ \text{ल}_{\text{इ}}\left(\frac{\text{य}}{\text{ज्याय}}\right)+1 \right\}$ इत्युत्तरम् ।

(४०) यदि $\text{र} = (\text{य}+\text{ज्याय})^{(\text{य}+\text{ज्याय})}$, अनयोरपि पक्षयोर्लघुरिक्थग्रहणेन $\text{ल}_{\text{इ}}\text{र} = (\text{य}+\text{ज्याय})\cdot\text{ल}_{\text{इ}}(\text{य}+\text{ज्याय})$। पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ $(1-\text{कोज्याय})\cdot\text{ल}_{\text{इ}}(\text{य}\cdot\text{ज्याय})+$

$$\frac{1}{\text{य}+\text{ज्याय}} \times (1-\text{कोज्याय}) \times (\text{य}+\text{ज्याय}) = \frac{1}{\text{र}} \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},$$

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = (\text{र}-\text{र}\cdot\text{कोज्याय}) \times \left\{ \text{ल}_{\text{इ}}(\text{ज्याय}\cdot\text{य})+1 \right\}$,

इत्युत्तरम् ।

(४१) यदि $\text{र} = \left\{ \text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य} \right\}^{\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}}$,

अत्र का तात्कालिकगतिः ?

ततोऽत्रापि पक्षयोर्लघुरिक्थग्रहणेन पक्षौ,

$\text{ल}_{\text{इ}}\text{र} = \text{ल}_{\text{इ}}\text{य} \times \text{ल}_{\text{इ}}(\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य})$।

ततस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \times \frac{1}{\text{र}} = \frac{1}{\text{य}} \cdot \text{ल}_{\text{इ}}(\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}) + \frac{1}{\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}} \times$$

$$\text{छे}^2\text{ल}_{\text{इ}}\text{य} \times \frac{1}{\text{य}} \times \text{ल}_{\text{इ}}\text{य} = \frac{1}{\text{य}} \cdot \text{ल}_{\text{इ}}(\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}) +$$

$$\frac{1}{\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}} \times \text{छे}^2\text{ल}_{\text{इ}}\text{य} + \frac{1}{\text{य}} \times \text{ल}_{\text{इ}}\text{य} =$$

$$\frac{1}{\text{य}} \times \left\{ \text{ल}_{\text{इ}}(\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}) + \frac{\text{छे}^2\text{ल}_{\text{इ}}\text{य} \times \text{ल}_{\text{इ}}\text{य}}{\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}} \right\}$$

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} =$

$$\frac{\text{र}}{\text{य}} \times \left\{ \text{ल}(\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}) + \frac{\text{छे}^2\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}\cdot\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}}{\text{स्प ल}_{\text{इ}}\text{य}} \right\}$$ इत्युत्तरम् ।

(४२) यदि $\text{र} = (\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})^{\text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})}$,

अत्र कस्तात्कालिकसम्बन्धः ?

पक्षयोर्लघुरिक्थग्रहणेन जातौ पक्षौ $\text{ल}_{\text{इ}}\text{र} =$

$\text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}) \times \text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})$, ततस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणात्—

$$\frac{1}{\text{र}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}} \times \frac{1}{\text{य}} \times \text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}) + \frac{1}{\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}} \times$$

$$\frac{1}{\text{य}} \times \text{ल}_{\text{इ}}\left\{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}\right\} = \frac{2\,\text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})}{\text{ल}_{\text{इ}}\text{य} \times \text{य}},$$

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{2\text{र}\cdot\text{ल}_{\text{इ}}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})}{\text{ल}_{\text{इ}}\text{य} \times \text{य}}$, इत्युत्तरम् ।

(४३) यदि ज्याय + कोज्याय = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ × कोज्या $\left(\frac{\pi}{४} - य\right)$

अत्र कस्तात्कालिकसम्बन्धः ? ।

अथ पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ कोज्याय-ज्याय

$= \frac{१}{\sqrt{२}} \times -$ज्या $\left(\frac{\pi}{४} - य\right) \times -१ =$

$\frac{१}{\sqrt{२}} \times$ज्या $\left(\frac{\pi}{४} - य\right)$, इत्युत्तरम् ।

(४४) यदि ज्याय + ज्या२य + ज्या३य····· + ज्या२४य =

$\frac{\text{ज्या } २\frac{५}{२}\, य - \text{ज्या } १२\, य}{\text{ज्या}\frac{य}{२}}$, इत्यस्ति

तदा कोज्याय + २ कोज्या२य + ३ कोज्या ३ य····· +
२४ कोज्या२४य = १२, इति कथम् ?

यदि २४ य = ग, इत्यस्ति ।

अत्र २४ य = $\pi = ३६^{\circ}$, तदा पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

कोज्याय + २ कोज्या २य + ३कोज्या ३ य····· + २४ कोज्या २४ य

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{य}{२}\left(\frac{२५}{२}\text{ कोज्या }\frac{२५}{२}य \times \text{ज्या १२ य} + १२\text{ कोज्या १२ य} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य\right) - \frac{१}{२}\text{कोज्या}\frac{य}{२} \times \text{ज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}} =$$

$$\frac{\text{ज्या}\frac{य}{२}\left(१२ + \frac{१}{२}\right)\text{ कोज्या }\frac{२५}{२}य \times \text{ज्या १२ य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}} +$$

$$\frac{\text{ज्या}\frac{य}{२} \cdot १२\text{ कोज्या १२ य} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य - \frac{१}{२}\text{कोज्या}\frac{य}{२} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{य}{२} \cdot १२\text{ काज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य} + \frac{१}{२}\text{ज्या}\frac{य}{२} \cdot \text{कोज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$+ \frac{\text{ज्या}\frac{य}{२} \cdot १२\text{ कोज्या १२ य} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य - \frac{१}{२}\text{कोज्या}\frac{य}{२} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{य}{२} \cdot १२\text{ कोज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य} + १२\text{ कोज्या १२ य} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या}\frac{य}{२}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$+ \frac{\frac{१}{२}\text{कोज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य} \cdot \text{ज्या}\frac{य}{२} - \frac{१}{२}\text{कोज्या}\frac{य}{२} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$= \frac{१२\text{ ज्या}\frac{य}{२}\left\{\text{कोज्या}\frac{२५}{२}य \cdot \text{ज्या १२ य} + \text{कोज्या १२य} \cdot \text{ज्या}\frac{२५}{२}य\right\}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\text{ज्या}\,१२\,य\left\{\text{कोज्या}\,\frac{२५}{२}\,य\cdot\text{ज्या}\,\frac{य}{२}-\text{कोज्या}\,\frac{य}{२}\cdot\text{ज्या}\,\frac{२५}{२}\,य\right\}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\,\frac{य}{२}\left\{\text{ज्या}\left(\frac{२५}{२}\,य+१२\,य\right)\right\}+\frac{1}{2}\text{ज्या}\,१२\,य\times\left\{\text{ज्या}\,\frac{२५}{२}\,य-\frac{य}{२}\right\}}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\left(\text{ज्या}\,\frac{४९}{२}\,य\right)+\frac{1}{2}\,\text{ज्या}\,१२\,य\,(\text{ज्या}\,१२\,य)}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\,\frac{य}{२}\left\{\text{ज्या}\,(२४\,य+\frac{1}{2}\,य\right\}+\frac{1}{2}\text{ज्या}\,१२\,य\cdot\text{ज्या}\,१२\,य)}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\,\frac{य}{२}\left(\text{ज्या}\,२४\,य\cdot\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}\,य+\text{कोज्या}\,२४\,य\cdot\text{ज्या}\,\frac{1}{2}\,य\right)+\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}\,१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

पूर्वमत्र कल्पितं, $२४\,य=३६०^{\circ}$ । अतः ज्या $२४\,य=०$, कोज्या $२४\,य=$ त्रि $=१$, आभ्यामुत्थापिते (१) समीकरणरूपम्

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\,\frac{य}{२}\left(०\times\text{कोज्या}\,\frac{य}{२}+१\times\text{ज्या}\,\frac{1}{2}\,य\right)+\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}\,१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}\,\frac{य}{२}\times\text{ज्या}\,\frac{य}{२}+\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}\,१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$$=\frac{१२\,\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}+\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}=१२+\frac{\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}$$

$१२\,य=१८०^{\circ}$, अतः $\frac{1}{2}\,\text{ज्या}^{२}\,१२\,य=०$, अतः

$$\frac{\text{ज्या}^{२}१२\,य}{\text{ज्या}^{२}\frac{य}{२}}=०\,,$$

$१\cdot\text{कोज्या}\,य+२\cdot\text{कोज्या}\,२य+३\cdot\text{कोज्या}\,३य\cdots\cdots+२४\cdot\text{कोज्या}\,२४\,य=$ [illegible] ।

अथ तृतीयाध्यायोदाहरणानामुत्तराणि

(१) यदि मंफज्या = ज्यामंके · ज्याअंफ, इत्यस्ति तदेष्टकेन्द्रगतौ [illegible] मन्दफलगतिः का ?

उच्यते "चलभोगगतिर्भाषकोटिज्यागुणितेष्टया" दिना पक्षयोस्तात्कालिकी गतिः-

मंफगा = कोज्यामंके · मंकेग · ज्याअंफ, अतः

$$\text{मंफगा}=\frac{\text{कोज्यामंके}\cdot\text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामंफ}}\,,\ \text{इत्युत्तरम्}\ ।$$

(२) मंफ = ज्यामंके · ज्याअंफ, इत्यस्ति तदैक्यरूपगत्या मन्दफल [illegible] ।

अत्र ज्याचापयोः स्वल्पान्तरादभेदं मत्वा पक्षयोस्तात्कालिकीगति

$\text{मंफग} = \text{कोज्यामंके} \cdot \text{मंकेग} \cdot \text{ज्याअंफ}$, अतः $\frac{\text{मं फ ग}}{\text{मं के ग}} =$

कोज्यामंके ० ज्याअंफ, इत्युत्तरम् ।

(३) यदि ज्यामंफ = ज्यामंके · के · ज्याअंफ, तदेष्टकेन्द्रगतौ

गतिः का ?

अत्रापि "चलचापगतिश्चापकोटिज्येत्यादिना" पक्षयो गतिस्तात्का-

लिकी मंफग · कोज्यामंफ = ज्याअंफ × ता (ज्यामंके - मंके) =

ज्याअंफ · $\left\{ \text{मंकेग} - \text{कोज्यामंके} \cdot \text{मंके} + \text{मंकेग} \cdot \text{ज्यामंके} \right\}$ =

ज्याअंफ × मंकेग · (कोज्यामंके · मंके + ज्यामंके) अतः $\frac{\text{मंफग}}{\text{मंकेग}} =$

$\frac{\text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामंफ}}$ (कोज्यामंके ० मंके + ज्यामंके), इत्युत्तरम् ।

(४) ज्यास्पके $= \frac{\text{ज्यामंके} \circ \text{त्रि}}{\text{क}} = \frac{\text{ज्यामंके}}{\text{क}}$, अत्र स्पष्टीकरणेन

गतिः का ?

अथात्र स्पकेज्या $= \frac{\text{मंकेज्या}}{\text{क}} = \frac{\text{फज्या}}{\text{अंफ}}$, पक्षयोः पूर्वोक्तयुक्त्या

तात्कालिकी गतिः स्पकेकोज्या · स्पकेग $= \frac{\text{फग} - \text{त्रि} - \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}} =$

(मंकेग ∽ स्पकेग) $\times \frac{\text{त्रि} - \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}} = \frac{\text{मंकेग} - \text{त्रि} - \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}}$ ∴

$\frac{\text{स्पकेग} - \text{त्रि} \circ \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}}$, अतः स्पकेकोज्या · स्पकेग =

$\frac{\text{स्पकेग} - \text{त्रि} - \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}} = \frac{\text{मंकेग} - \text{त्रि} - \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}}$, अतः $\frac{\text{स्पकेग}}{\text{मंकेग}} =$

$\frac{\text{त्रि} \cdot \text{फकोज्या}}{\text{अंफ}} = \frac{\text{त्रि} \circ \text{फकोज्या}}{\text{स्पकेकोज्या} \cdot \text{अंफ} \div \text{त्रि} \cdot \text{फकोज्या}} =$

$\frac{\text{फकोज्या}}{\text{मूल} \div \text{फज्या}} = \frac{\text{फकोज्या}}{\text{फज्या}}$

$\frac{\text{त्रि}}{\text{फकोज्या} \cdot \text{अंफ} \div \text{फकोज्या}} = \frac{\text{स्पकेग}}{\text{मंकेग}}$, इत्युत्तरम् ।

(५) ज्याक्रा $= \frac{\text{द्यु} \times \text{ज्याल}}{\text{ज्यादि}}$, अत्र यदि दि, अयमेव चलराशिस्तदा

ज्याक्रा का तात्कालिकी गतिः ?

ताक्रा - कोज्याक्रा

तात्कालिकी गतिः $\frac{\text{ता दि} \circ \text{कोज्यादि} \cdot \text{लंज्या} \cdot \text{द्यु}}{\text{ज्या}^2\text{दि}}$, अत्र

(द्यु · ज्याल) ज्यादि

स्थिरत्वकल्पनत्वात् तात्कालिकी गतिः शून्या भवेदतः—

कोज्याक्रा $= \frac{\text{ता (दि) - कोज्यादि} \cdot \text{द्यु} \cdot \text{ज्याल}}{\text{ज्या}^2\text{दि}}$, अतः

कोज्यादि ० द्यु ० ज्याल

कोज्याक्रा · ज्या²दि, इत्युत्तरम् ।

(६) कस्यांचिदेकस्याः पिपीलिकायाः प्रथमहोरायामेकमङ्गुलं द्वितीय-

य

य

य

ल $_{\text{इ}}$ (ल $_{\text{इ}}$ य), अथ पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{र}} \times \frac{१}{\text{र}} \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} =$$

ता (य) $\times$ ल $_{\text{इ}}$ य + ता (ल $_{\text{इ}}$ य) · य + ता $\{$ ल $_{\text{इ}}$ (ल $_{\text{इ}}$ य) $\}$ $\times$ ता (ल $_{\text{इ}}$ य) $\times$ ता (य) ; वा, १ $\times$ ल $_{\text{इ}}$ य

$$+\frac{१}{\text{य}} \times \text{य} + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य}} \times \frac{१}{\text{य}} \times १ = \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} + १ + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} \times \text{य}},$$ अतः

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{र} \times २\left\{१ + \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} - \text{य}}\right\},$$ परञ्चात्र र $=$

$\sqrt[\text{य}]{\text{य}^{\text{य}}}$, अतः ल $_{\text{इ}}$ र $= \text{य}^{\frac{\text{य}}{\text{य}}} \cdot$ ल $_{\text{इ}}$ य, अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{य}^{\frac{\text{य}}{\text{य}}} \cdot$ ल $_{\text{इ}}$ य $\cdot \text{य}^{\frac{\text{य}}{\text{य}}}$

$$\left\{१ + \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} \cdot \text{य}}\right\},$$ अत्र चेत् य $=$ ९, तदा $\text{य}^{\frac{\text{य}}{\text{य}}} = (९)^{९} =$ ३१२९, अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} =$

$$\left\{१ + \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} - \text{य}}\right\} \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} \cdot (९)^{९} \cdot (९)^{३१२९} =$$

$$\left\{१ + \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} - \text{य}}\right\} \text{ल}_{\text{इ}}\,\text{य} \times (९)^{९ + ३१२९} =$$

$$\left\{१ + \text{ल}_{\text{इ}}\,९ + \frac{१}{\text{ल}_{\text{इ}}\,९ \times ९}\right\} \times \text{ल}_{\text{इ}}\,९ \times (९)^{३१३०} =$$

$$\left(\text{ल}_{\text{इ}}\,९ + \text{ल}^{२}_{\text{इ}}\,९ + \frac{१}{९}\right) \cdot (९)^{३१३०},$$ इत्युत्तरम् ।

(७) द्वौ कीटौ कुलालचक्रपरिधौ एकस्माद्बिन्दुतः सहैव चलितौ तत्रैकोऽर्धचापं प्रचलति तज्ज्यातुल्यचापस्य कोटिज्याचापसममन्यश्चलति तदानयोर्गत्योः कः सम्बन्धः ?

अत्र कल्प्यते प्रथमकीटोयच्चापं चलति तन्मानम् $=$ य । द्वितीयकीटोऽस्य ज्यासमचापकोटिज्याचापसमं चलत्यतस्तच्चलनप्रमाणम् $=$ कोज्या (ज्याय), अतः र $=$ कोज्या (ज्याय) अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -$ ज्या (ज्याय) · कोज्याय

$$= \frac{-\text{ज्या}\,(\text{ज्याय})}{\frac{१}{\text{कोज्याय}}} = \frac{-\text{ज्या}\,(\text{ज्याय})}{(\text{कोज्या}^{-१}\,\text{य})^{-१}},$$ इत्युत्तरम् ।

(८) पृथिव्याः प्रदक्षिणीकर्तुं द्वौ पुरुषौ सहैव चलितौ, तयोरेको गर्भाभिमुखेन यावत्कोणसम्बन्धं चलति तज्जोवासमा यावद्दशस्पर्शरेखा भवेत्तान्तर्मध्यमन्यश्चलति तदा द्वयोस्तात्कालिकी गतिः का ?

अत्र कल्प्यते प्रथमचलनमंशात्मकम् $=$ य । द्वितीयोऽर्धांशस्य ज्या यावद्दशस्पर्शरेखा भवेत्तावन्तमंशं चलत्यतस्तन्मानम् $=$ रप$^{-१}$ (ज्याय), अतः र $=$ रप$^{-१}$ (ज्याय), अतस्तृतीयाध्यायस्य तृतीयसिद्धान्तेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{१ + \text{ज्या}^{२}\,\text{य}} \times \text{कोज्याय} = \frac{\text{कोज्याय}}{१ + \text{ज्या}^{२}\,\text{य}},$$ इत्युत्तरम् ।

(९) तच्चापमन्वेषणीयमस्ति यस्य गतितः स्पर्शरेखागतिश्चतुर्गुणा भवति ?

अत्र कल्प्यते चापमानम् $=$ य, अस्य स्पर्शरेखा $=$ रप्य, पक्षयोस्तात्कालिकी-गतिः क्रमेण १, छे^{२}य अतोऽत्र प्रश्नोक्त्या ४ $=$ छे^{२}य $=$ १ $+$ रप^{२}य, अतः ३ $=$ रप^{२}य $= \frac{\text{ज्या}^{२}\,\text{य}}{\text{कोज्या}^{२}\,\text{य}}$, अतः ३ कोज्या^{२}य $=$ ज्या^{२}य $=$ ३ (१ $-$ ज्या^{२}य) $=$ ३ $-$ ३ ज्या^{२}य, $\therefore$ ३ $=$ ४ ज्या^{२}य, अतः २ ज्याय $= \sqrt{३}$, अतः ज्याय $= \frac{\sqrt{३}}{२}$, अत्र यदि य $= ६०^{\circ}$, तदैव ज्याय $= \frac{\sqrt{३}}{२}$, इति ज्ञापितः य $= ६०^{\circ}$, इत्युत्तरम् ।

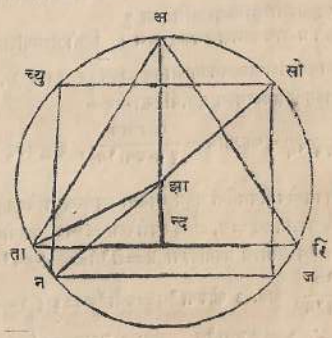
(१०) कस्यचिद्वृत्तस्यान्तरे समत्रिबाहुसमचतुर्भुजौ वर्त्तेते, कल्प्यतां यद्वृत्तव्यासार्धमानं द्विगुणं जातमिति तदा तात्कालिकसमत्रिबाहुकफलगत्या चतुर्भुजफलं कियद्गुणमधिकं भवेदिति प्रश्नः ?

यथात्र कल्प्यते च्युसोजन, वृत्तान्तर्गतसमचतुर्भुजोऽस्ति । अतादि, त्रिभुजोऽस्ति । व्यासदलमानम् = झासौ = झान = झाता = व । अतोव्यासमानम् = २व । चतुर्भुजे भुजकोट्योः समानत्वात्तत्फलम् = भु × को = को² = भु² = $\frac{\text{व्या}^2}{2}$ = २ व² ।

यतः च्युसो² + च्युन² = नसो², वा, २भु² = व्या², अतः भु² = $\frac{\text{व्या}^2}{2}$ ।

परञ्च $\frac{\text{व्या}^2}{2} = \frac{4\,\text{व}^2}{2}$ = २ व², अतश्चतुर्भुजफलम् = २व² ।

क्षेत्रदर्शनम्



अथ त्रिभुजे भुजमानम् = भु । तत्र अता² − $\frac{\text{तारि}^2}{2}$ = अन्द², वा, भु² − $\frac{\text{भु}^2}{4}$ = $\frac{3\,\text{भु}^2}{4}$ = लम्बवर्गः ।

लम्बवर्गगुणोभूम्यर्धवर्गस्त्रिभुजेफलवर्गसमानम् = $\frac{3\,\text{भु}^2}{4} \times \frac{\text{भु}^2}{4} = \frac{3\,\text{भु}^4}{16}$ ।

तत्त्यमूलं फलम् = $\frac{\sqrt{3} \times \text{भु}^2}{4}$ ।

अथ अतादि, त्रिभुजे भुजमानज्ञानार्थं झातान्द, त्रिभुजे कोणानुपातेन

तान्द = $\frac{\text{भु}}{2} = \frac{\text{झाता} \times \angle\text{ताझाल}}{\angle\text{झालता}} = \frac{\text{व} \times 60^\circ \text{ ज्या}}{90^\circ \text{ ज्या}} = \frac{\text{व} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} =$

$\frac{\text{व} \cdot \sqrt{3}}{2}$, अतः भु = व · $\sqrt{3}$, अतः भु² = ३व² ।

अतस्त्रिभुजफलम् = $\frac{\sqrt{3} \times 3\,\text{व}^2}{4}$, चतुर्भुजफलम् = २व² ।

अनयोः फलयोस्तात्कालिकी गतिः क्रमेण $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 \times 2 \times$ व, २ × २ व,

अत्र यदि कल्प्यते २ व = व̇, तदा

तात्कालिकत्रिभुजफलम् = $\frac{\sqrt{3} \times 3 \times \dot{\text{व}}}{4}$ = तात्रिफ ।

तात्कालिकचतुर्भुजफलम् = २व̇ = ताचफ ।

अतः $\frac{\text{ताचफ}}{\text{तात्रिफ}} = \frac{2\,\dot{\text{व}}}{\frac{\sqrt{3} \times 3 \times \dot{\text{व}}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{3} \times 3}$, इत्युत्तरम् ।

इति तृतीयाध्यायः ।

अथ चतुर्थाध्यायप्रश्नान्तराणामुत्तराणि ।

(१) यदि र = छ$^{-1}$ $\left(\frac{\text{क} - \text{ख}\,\text{य}}{\text{ख} - \text{क}\,\text{य}}\right)$, अत्र तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

कल्प्यते $\frac{\text{क} - \text{ख}\,\text{य}}{\text{ख} - \text{क}\,\text{य}}$ = ल, तदा र = छ$^{-1}$ल, ततस्तृतीयाध्यायचतुर्थसिद्धान्तेन पक्षयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ ।

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^२ - १}} \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} =$$

$$\frac{१}{\frac{\text{क}-\text{खय}}{\text{ख}-\text{कय}} \times \sqrt{\left(\frac{\text{क}-\text{खय}}{\text{ख}-\text{कय}}\right)^२ - १}} \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} =$$

$$\frac{१}{\frac{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{(\text{क}-\text{खय})^२ - (\text{ख}-\text{कय})^२}}{(\text{ख}-\text{कय}) \times \sqrt{(\text{ख}-\text{कय})^२}}} \times \frac{(\text{खकय} - \text{ख}^२) - (\text{खकय} - \text{क}^२)}{(\text{ख}-\text{कय})^२}$$

$$= \frac{१}{\frac{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{(\text{क}-\text{खय})^२ - (\text{ख}-\text{कय})^२}}{(\text{ख}-\text{कय})^२}} \times \frac{\text{क}^२ - \text{ख}^२}{(\text{ख}-\text{कय})^२} =$$

$$\frac{(\text{क}^२ - \text{ख}^२) \times (\text{ख}-\text{कय})^२}{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{(\text{क}-\text{खय})^२ - (\text{ख}-\text{कय})^२ \times (\text{ख}-\text{कय})^२}} =$$

$$\frac{\text{क}^२ - \text{ख}^२}{(\text{क}-\text{ख}) \times \sqrt{(\text{क}-\text{खय})^२ - (\text{ख}-\text{कय})^२}} =$$

$$\frac{\text{क}^२ - \text{ख}^२}{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{\text{क}^२ - \text{ख}^२ + \text{ख}^२\text{य}^२ - \text{क}^२\text{य}^२}} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{क}^२ - \text{ख}^२} \times \sqrt{\text{क}^२ - \text{ख}^२}}{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{\text{क}^२ - \text{ख}^२} \times \sqrt{१ - \text{य}^२}} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{क}^२ - \text{ख}^२}}{(\text{क}-\text{खय}) \times \sqrt{१ - \text{य}^२}}, \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(२) यदि $\text{र} = \frac{२६\,\text{य}^२ + ३०\,\text{य}}{६१}$,

अत्र द्वितीया तात्कालिकीगतिः का ?

प्रथमाध्यायद्वितीयपञ्चमसिद्धान्ताभ्यास—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{५०\,\text{य} + ३०}{६१}, \text{ पुनः पक्षयोस्तात्कालिकी गतिः}$$

$$\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२} = \frac{५०}{६१}, \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(३) यदि $\text{र} = \text{ज्या}^{-१}\left(\frac{\text{य}}{\text{क}}\right)$, अत्र तृतीयस्तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

ततस्तृतीयाध्यायप्रथमसिद्धान्तेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \frac{\text{य}^२}{\text{क}^२}}} \times \frac{१}{\text{क}} = \frac{१}{\sqrt{\text{क}^२ - \text{य}^२}} = \frac{१}{(\text{क}^२ - \text{य}^२)^{\frac{१}{२}}},$$

पुनरस्य तात्कालिकगतिग्रहणेन—

$$\frac{\text{ता}^२\text{र}}{\text{ताय}^२} = \frac{-\frac{१}{२}(\text{क}^२ - \text{य}^२)^{-\frac{३}{२}} \times -२\,\text{य}}{\text{क}^२ - \text{य}^२}$$

$$\frac{\text{य} \times (\text{क}^२ - \text{य}^२)^{-\frac{३}{२}}}{\text{क}^२ - \text{य}^२} = \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{क}^२ - \text{य}^२} \times (\text{क}^२ - \text{य}^२)} =$$

$$\frac{\text{य}}{(\text{क}^२ - \text{य}^२)^{\frac{१}{२}} \times (\text{क}^२ - \text{य}^२)} = \frac{\text{य}}{(\text{क}^२ - \text{य}^२)^{\frac{३}{२}+१}} =$$

$$\frac{\text{य}}{(\text{क}^२ - \text{य}^२)^{\frac{५}{२}}},$$

पुनरस्य तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन $\frac{\text{ता}^२\text{र}}{\text{ताय}^२} =$

$$\frac{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}+\frac{३}{२}(क^२-य^२)^{\frac{१}{२}}\times २ य\times य}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}\times(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}=$$

$$\frac{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}+३(क^२-य^२)^{\frac{१}{२}}\times य^२}{(क^२-य^२)^{३}},$$

हरभाज्यौ $(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}$, अनेन भक्तौ जातौ—

$$\frac{\frac{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}+\frac{३(क^२-य^२)^{\frac{१}{२}}\times य^२}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}}{\frac{(क^२-य^२)^{३}}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}}=$$

$$\frac{१+३ य^२(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}-\frac{३}{२}}}{(क^२-य^२)^{३-\frac{३}{२}}}=$$

$$=\frac{१+३ य^२(क^२-य^२)^{-१}}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}}=\frac{१+\frac{३ य^२}{क^२-य^२}}{(क^२-य^२)^{\frac{३}{२}}},$$ इत्युत्तरम्

(४) यदि $र=\frac{३}{२+य^२}$, अत्र चतुर्थतात्कालिकः सम्बन्धः कः ?

ततस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन $\frac{तार}{ताय}=\frac{-६ य}{(२+य^२)^२}$ ।

पुनर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन

$$\frac{तार^२}{ताय^२}=-\frac{६(२+य^२)^२-२(२+य^२)\times २ य\times ६ य}{(२+य^२)^४}=$$

$$-\frac{६(२+य^२)-२४ य^२}{(२+य^२)^३}=$$

$$\frac{२४ य^२-६ य^२-१२}{(२+य^२)^३}=\frac{१८ य^२-१२}{(२+य^२)^३}=\frac{६(३ य^२-२)}{(२+य^२)^३}$$ ।

पुनर्गतिग्रहणेन— $\frac{ता^२र}{ताय^२}=$

$$\frac{६\{६य(२+य^२)^२-३(२+य^२)^२\times २य(३य^२-२)\}}{(२+य^२)^६}=$$

$$\frac{६\{६य(२+य^२)-६य(३य^२-२)\}}{(२+य^२)^४}=$$

$$\frac{६\{१२ य+६ य^३-१८ य^३+१२ य\}}{(२+य^२)^४}=\frac{६(२४ य-१२ य^३)}{(२+य^२)^४}=$$

$$\frac{६\times६(४ य-२ य^३)}{(२+य^२)^४}=\frac{३६(४ य-२य^३)}{(२+य^२)^४}$$ ।

पुनरस्य तात्कालिकगतिग्रहणेन । $\frac{ता^४र}{ताय^४}=$

$$\frac{३६\{४-६य^२(२+य^२)^४-४(२+य^२)^३\times २य(४य-२य^३)\}}{(२+य^२)^८}=$$

$$\frac{३६(४-६य^२)(२+य^२)-८य(४य-२य^३)}{(२+य^२)^५}=$$

$$\frac{३६(८-१२ य^२+४ य^२-६ य^४-३२ य^२+१६ य^४)}{(२+य^२)^५}=$$

$$\frac{३६(८+१० य^४-४य^२)}{(२+य^२)^५}=\frac{३६\times२(५य^४-२० य^२+४)}{(२+य^२)^५}=$$

$$\frac{७२(५य^४-२०य^२+४)}{(२+य^२)^५}$$, इत्युत्तरम् ।

(५) यदि र=$e^{य}$. ज्याय, अत्र न संख्यकतात्कालिकसम्बन्धः कः ?

अत्र प्रथमतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = ज्याय · $e^{य}$ + $e^{य}$ · कोज्याय = $e^{य}$ (ज्याय + कोज्याय),

कल्प्यते π = १८० तदा कोज्या $\frac{\pi}{४}$ =

ज्या $\frac{\pi}{४}$ = कोज्या ४५° = ज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$, इति विज्ञेयम् ।

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{२}} \times e^{य} \times$ (ज्याय + कोज्याय) ÷ $\frac{१}{\sqrt{२}}$ =

$\sqrt{२} \times e^{य}$ (ज्याय · $\frac{१}{\sqrt{२}}$ + कोज्याय · $\frac{१}{\sqrt{२}}$) =

$\sqrt{२} \times e^{य}$ (ज्याय · कोज्या $\frac{\pi}{४}$ + कोज्याय · ज्या $\frac{\pi}{४}$) =

$\sqrt{२} + e^{य}$ · ज्या (य + $\frac{\pi}{४}$),

पुनरस्य तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}^{२}}{\text{ताय}^{२}}$ =

$\sqrt{२}$ { $e^{य}$ · ज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) + $e^{य}$ · कोज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) } =

$\sqrt{२} \times e^{य}$ (ज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) + कोज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) =

$\sqrt{२} \times e^{य} \times \sqrt{२} \times$

{ ज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) · कोज्या $\frac{\pi}{४}$ + कोज्या (य + $\frac{\pi}{४}$) - ज्या $\frac{\pi}{४}$ } =

($\sqrt{२}$)^{२} $e^{य}$ { ज्या (य + $\frac{२\pi}{४}$) } =

२ × $e^{य}$ · ज्या (य + $\frac{२\pi}{४}$) अत्रैव यदि २ = न,

तदा $\frac{\text{तार}^{\text{न}}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ = $\frac{\text{न}}{२}$. $e^{य}$ · ज्या (य + $\frac{\text{न}\pi}{४}$) इत्युत्तरम् ।

(६) यदि य = क · कोज्याष + अ · ज्याष, तथा र = क · ज्याष — अ · कोज्याष, अत्र न, विषमसंख्यास्ति

तदा $\frac{\text{तार}^{\text{न}}\text{य}}{\text{ताष}^{\text{न}}} \times \frac{\text{तार}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताष}^{\text{न}}}$ =

ज्या २ ष ($\frac{\text{अ}^{२} - \text{क}^{२}}{२}$) + अक · कोज्या२ष, इति कथम् ?

यतः य = क · कोज्याष + अ · ज्याष, अतस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन

जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}$ = — क · ज्याष + अ · कोज्याष,

पुनर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}^{२}\text{य}}{\text{ताष}^{२}}$ = — क · कोज्याष — अ · ज्याष,

पुनस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}^{३}\text{य}}{\text{ताष}^{३}}$ = क · ज्याष — अ · कोज्याष,

अत्रैव यदि ३ = न, तदा

$\frac{\text{तार}^{\text{न}}\text{य}}{\text{ताष}^{\text{न}}}$ = क · ज्याष — अ · कोज्याष,

अथ यदा र = क · ज्याष — अ . कोज्याष, अनयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन

जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$ = क . कोज्याष + अ . ज्याष,

पुनरनयोर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = -\text{क}\cdot\text{कोज्याय} + \text{अ}\cdot\text{कोज्याय},$

पुनरनयोस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} = -\text{क}\cdot\text{कोज्याय} - \text{अ}\cdot\text{ज्याय}$, अत्र यदि ३ = न,

तदा $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = -\text{क}\cdot\text{कोज्याय} - \text{अ}\cdot\text{ज्याय},$

अतः $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{य}}{\text{ताय}^{\text{न}}} \times \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} =$

(क . कोज्याय - अ . कोज्याय).

(− क . कोज्याय − अ . ज्याय) = − क . कोज्याय . क . ज्याय +

अ . कोज्याय . क . कोज्याय − क . ज्याय . अ . ज्याय +

अ . कोज्याय . अ . ज्याय = − क^{२} . कोज्याय . ज्याय + अ.क.कोज्या^{२}य

− अ . क . ज्या^{२}य + अ^{२} . कोज्याय . ज्याय =

२ कोज्याय०ज्याय $\left(\frac{\text{अ}^{२}-\text{क}^{२}}{२}\right)$ + अ.क.कोज्या२य, इत्युत्तरम् ।

(७) यदि र = य . लाय, अत्रास्य तृतीयस्तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

तत्र प्रथमतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = १ \times \text{लाय} + \frac{१}{\text{य}} \times \text{य} = \text{लाय} + १$

पुनरनयोर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन पक्षौ—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \frac{१}{\text{य}}$ । पुनरनयोस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन जातौ रूपौ,

$\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} = \frac{०\times\text{य}-१}{\text{य}^{२}} = -\frac{१}{\text{य}^{२}}$ । इत्युत्तरम् ।

(८) यदि र = ज्याय . लाय, अत्र द्वितीयसम्बन्धः कः ?

पक्षयोः प्रथमसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय}\cdot\text{लाय} + \text{ज्याय}\cdot\frac{१}{\text{य}},$

पुनरनयोः सम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = -\text{ज्याय}\cdot\text{लाय} + \frac{१}{\text{य}}\cdot\text{कोज्याय} + \frac{१}{\text{य}}\cdot\text{कोज्याय} - \frac{१}{\text{य}^{२}}\cdot\text{ज्याय}$

$= -\text{र} + \frac{२\text{कोज्याय}}{\text{य}} - \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}^{२}} = \frac{२\text{कोज्याय}}{\text{य}} - \text{र} - \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}^{२}},$

इत्युत्तरम् ।

(९) यदि र = य$^{\text{न}}$. लाय, तदा $\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}} = \frac{\text{न}}{\text{य}}$, इति कथम् ?

पक्षयोः प्रथमसम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न}\cdot\text{य}^{\text{न}-१} \times \text{लाय} + \frac{१}{\text{य}}\cdot\text{य}^{\text{न}} =$

न . य$^{\text{न}-१}$ × लाय + य$^{\text{न}}$. य$^{-१}$ = न . य$^{\text{न}-१}$ × लाय + य$^{\text{न}-१}$ ।

पुनरनयोर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन जातौ पक्षौ—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \text{न}(\text{न}-१)\,\text{य}^{\text{न}-२} \times \text{लाय} + \frac{१}{\text{य}} \times \text{न}\cdot\text{य}^{\text{न}-१} +$

$(\text{न}-१)\cdot\text{य}^{\text{न}-२} =$

$= \text{न}(\text{न}-१)\,\text{य}^{\text{न}-२} \times \text{लाय} + \text{न}\cdot\text{य}^{\text{न}-२} + (\text{न}-१)\,\text{य}^{\text{न}-२},$

अत्रैव यदि २ = न, तदा—

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{न}(\text{न}-१)\cdot\text{यं} \times \text{लाय} + २\,\text{यं} + (\text{न}-१)\,\text{यं} =$

न (न-१) × १ × लाय + २ + १ = न (न-१) . लाय + ३

पुनरस्य तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{ता}^{न+१}\,र}{\text{ता}^{न+१}\,य} = न\,(न-१)\cdots\cdots\times\frac{१}{य} = \frac{\lfloor न}{य}, \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(१०) यदि र = ज्या २ य + रूप २ य, अत्र द्वितीयसम्बन्धः कः ?
तत्र पक्षयोः प्रथमतस्सम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ता}\,(\text{ज्या}२य)\cdot\text{ता}\,(२य)+\text{ता}\,(\text{रूप}२य)\cdot\text{ता}\,(२य)$$

$$= \text{कोज्या}\,२य\times२+\text{छे}^{२}२य\times२ = २\,(\text{कोज्या}\,२य+\text{छे}^{२}२य)$$

$$= २\left(\text{कोज्या}\,२य+\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\,२य}\right),$$

पुनरनयोस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन जातां पक्षयोः स्वरूपौ—

$$\frac{\text{ता}^{२}\,र}{\text{ता}^{२}\,य} = २\left\{-२\,\text{ज्या}\,२य+\text{ता}\left(\frac{१}{\text{कोज्या}\,२य\cdot\text{कोज्या}२य}\right)\right\} =$$

$$२\left(-२\,\text{ज्या}\,२य+\frac{४\,\text{ज्या}\,२य\circ\text{कोज्या}\,२य}{\text{कोज्या}^{४}\,२य}\right) =$$

$$२\left(-२\,\text{ज्या}\,२य+\frac{४\,\text{ज्या}\,२य}{\text{कोज्या}^{२}\,२य}\right) =$$

$$४\left(-२\,\text{ज्या}\,२य+\frac{२\,\text{ज्य}\,२य}{\text{कोज्या}^{२}\,२य}\right), \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(११) यदि र = कोज्याय · ज्या ३ य, अत्र न संख्यकस्तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

यतः कोज्याय · = ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$,

अतः र = ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ · ज्या ३य, अनयोस्तात्कालिकसम्बन्धौ—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\cdot\text{ज्या}\,३य+३\,\text{कोज्या}\,३य\cdot$$

$$\text{कोज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right) =$$

कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ · ज्या ३य + कोज्या ३य · ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ +
२ कोज्या ३ य · ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$

$$= \text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}+३य\right)+२\,\text{कोज्या}\,३\,य\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$$

$$= \text{ज्या}\left(४य+\frac{\pi}{२}\right)+२\,\text{कोज्या}\,३\,य\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)-$$

$$\text{ज्या}\left(४य+\frac{\pi}{२}\right)+\text{ज्या}\left(४य+\frac{\pi}{२}\right) =$$

$$२\,\text{ज्या}\left(४य+\frac{\pi}{२}\right)+२\,\text{कोज्या}\,३य\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)-$$

$$\text{ज्या}\left(४\,य+\frac{\pi}{२}\right)$$

परञ्च ज्या $\left(४य\frac{\pi}{२}\right)$ = ज्या $\left\{\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+३\,य\right\}$ =

ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ · कोज्या ३य + कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ + ज्या ३य ।

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ =

$$२\,\text{ज्या}\left(४\,य+\frac{\pi}{२}\right)+२\,\text{कोज्या}\,३\,य\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$$

$$-\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\cdot\text{कोज्या}\,३य-\text{कोज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\cdot\text{ज्या}३य$$

$$= २\,\text{ज्या}\left(४य+\frac{\pi}{२}\right)+\text{कोज्या}\,३\,य\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)-$$

$$\text{कोज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\cdot\text{ज्या}\,३\,य$$

$= २ \text{ ज्या} \left(४य + \frac{\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left\{ ३य - \left(य + \frac{\pi}{२} \right) \right\} =$

$२ \text{ ज्या} \left(४य + \frac{\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२य + \frac{\pi}{२} \right),$

ततोद्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{२}र}{\text{ताय}^{२}} = ४ \times २ \text{कोज्या} \left(४य + \frac{\pi}{२} \right) + २ \text{ कोज्या} \left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$

अत्राप्यनयोः "ज्या $\left(४य + \frac{\pi}{२} \right)$" "ज्या $\left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$"

तात्कालिकीगतिः क्रमेणानयोः $४य + \frac{\pi}{२}$; $२य \frac{\pi}{२}$, तात्कालिकी-

गतिगुणा योगे कृते सपूर्णस्य राशेस्तात्कालिकी गतिः—

$\frac{\text{ता}^{३}र}{\text{ताय}^{३}} = ४ \times २ \text{ कोज्या} \left(४ य \frac{\pi}{२} \right) + २ \text{ कोज्या} \left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$

$= ४ \times २ \text{ ज्या} \left(४य + \frac{\pi}{२} \right) + २ \text{ ज्या} \left(२य + \frac{२\pi}{२} \right) =$

$२^{१} \left\{ २^{२} \text{ ज्या} \left(४ य + \frac{२\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२ य + \frac{\pi २}{२} \right), \right.$

पुनरस्य $४ \times २ \text{ ज्या} \left(४ य + \frac{२\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२य + \frac{\pi २}{२} \right),$

तृतीयतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{३}र}{\text{ताय}^{३}} = ४ \times २ \times ४ \text{ कोज्या} \left(४ य + \frac{२\pi}{२} \right) +$

$२ \times २ \text{ कोज्या} \left(२ य + \frac{२\pi}{२} \right) =$

$४ \times २ \times ३ \text{ज्या} \left(४ य + \frac{\pi ३}{२} \right) + २ \times २ \text{ ज्या} \left(२ य = \frac{३\pi}{२} \right)$

$= २ \times २ \left\{ ४ \times २ \text{ज्या} \left(४ य + \frac{३\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) \right\} =$

$२^{२} \left\{ २^{३} . \text{ज्या} \left(४ य + \frac{३\pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२ य + \frac{३\pi}{२} \right) \right\}$

अनेव यदि ३ = न, तदा—

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}र}{\text{ताय}^{\text{न}}} = २^{\text{न}-१} \left\{ २^{\text{न}} . \text{ज्या} \left(४य + \frac{\text{न} \cdot \pi}{२} \right) + \text{ज्या} \left(२य + \frac{\text{न} \cdot \pi}{२} \right) \right\}$

इत्युत्तरम् ।

(१२) यदि र = ४ ज्याय . ज्या३य . ज्या४य,

अत्र न संख्यकतात्कालिकसम्बन्धः कः ?

अथत्रिकोणमित्या–४ज्याय . ज्या३य . ज्या४य =

२ ज्या४य × (२ ज्याय . ज्या३य) =

२ ज्या ४ य × (कोज्या २ य—कोज्या ४ य) =

२ ज्या ४ य × ज्या $\left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$ — २ ज्या ४ य . कोज्या ४ य =

कोज्या $\left(\frac{\pi}{२} - २ य \right)$ — कोज्या $\left(६य + \frac{\pi}{२} \right)$ — ज्या ८ य

= ज्या २ य + ज्या ६ य — ज्या ८ य ।

परञ्चात्र ज्या ८ य = ज्या $\left(१८^{\circ} - ८ य \right)$ =

कोज्या $\left(२७^{\circ} - ८ य \right)$ = ज्या $\left(३६^{\circ} - ८ य \right)$,

यतः $\pi = १८^{\circ}$, अतः $२ \pi = ३६^{\circ}$ वा $\frac{४\pi}{२} = ३६^{\circ}$,

अतः ज्या $\left(३६^{\circ} - ८ य \right)$ = ज्या $\left(\frac{\pi ४}{२} - ८ य \right)$,

अतः ज्या ८ य = ज्या $\left(\frac{\pi ४}{२} - ८ य \right)$,

अतः र = ज्या २ य + ज्या ६ य — ज्या $\left(\frac{\pi ४}{२} - ८ य \right)$,

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} =$

२ कोज्या २ य + ६ कोज्या ६ य − $\left\{ -८ \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi ४}{२} - ८ य \right) \right\}$

= २ ज्या $\left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$ + ६ ज्या $\left(६य + \frac{\pi}{२} \right)$ +

८ ज्या $\left(\frac{\pi ९}{२} - ८ य \right)$

अथ द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{२}२}{\text{ताय}^{२}}$ = २ × २ कोज्या $\left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$ + ६ × ६ कोज्या $\left(६य + \frac{\pi}{२} \right)$ +

८ × − ८ कोज्या $\left(\frac{\pi ९}{२} - ८ य \right)$

४ कोज्या $\left(२य + \frac{\pi}{२} \right)$ + ३६ कोज्या $\left(६य + \frac{\pi}{२} \right)$ +

६४ कोज्या $\left(\frac{\pi ९}{२} - ८ य \right)$ =

४ ज्या $\left(२य + \frac{\pi २}{२} \right)$ + ३६ ज्या $\left(६य + \frac{\pi २}{२} \right)$ +

६४ ज्या $\left(\frac{\pi ६}{२} - ८ य \right)$ =

४ $\left\{ \text{ज्या } \left(२य + \frac{\pi २}{२} \right) + ९ \text{ ज्या } \left(६य + \frac{\pi २}{२} \right) + \right.$

$\left. १६ \text{ ज्या } \left(\frac{\pi ६}{२} - ८ य \right) \right\}$

पुनरस्य तृतीयलात्कालिकसम्बन्धः—

$\frac{\text{ता}^{३}२}{\text{ताय}^{३}}$ = ४ $\left\{ २ \text{ कोज्या } \left(२य + \frac{\pi २}{२} \right) + \right.$

$\left. ९ \times ६ \text{ ज्या } \left(६य + \frac{\pi २}{२} \right) + १६ (-८) \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi ६}{२} - ८ य \right) \right\}$

= ४ × $\left\{ २ \text{ ज्या } \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) + ५४ \text{ ज्या } \left(६य + \frac{\pi ३}{२} \right) - \right.$

$\left. १२८ \text{ ज्या } \left(\frac{\pi ७}{२} - ८ य \right) \right\}$ =

४ × २ $\left\{ \text{ ज्या } \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) + २७ \text{ ज्या } \left(६य + \frac{\pi ३}{२} \right) - \right.$

$\left. ६४ \text{ ज्या } \left(\frac{\pi ७}{२} - ८ य \right) \right\}$

= ८ $\left\{ \text{ज्या} \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) + २७ \text{ ज्या } \left(६य + \frac{\pi ३}{२} \right) - \right.$

$\left. ६४ \text{ ज्या } \left(\frac{\pi ७}{२} - ८ य \right) \right\}$

= $२^{३}$ $\left\{ \text{ज्या} \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) + ३^{३} \text{ ज्या } \left(६य \times \frac{३\pi}{२} \right) - \right.$

$\left. ५^{३} \text{ ज्या } \left(\frac{\text{७}\pi}{२} - ८ य \right) \right\}$

= $२^{३}$ $\left\{ \text{ज्या} \left(२य + \frac{३\pi}{२} \right) + ३^{३} \text{ ज्या } \left(६य + \frac{३\pi}{२} \right) + \right.$

$\left. (-१) . (४^{३}) \text{ ज्या } \left(\frac{\pi (४ + ३)}{२} - ८ य \right) \right\}$

यदि ३ = न, तदा

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}२}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ = $२^{\text{न}}$ $\left\{ \text{ज्या } \left(२ य + \frac{\text{न} \cdot \pi}{२} \right) + ३^{\text{न}} \text{ज्या } \left(६य + \frac{\text{न} \cdot \pi}{२} \right) + \right.$

$\left. (-१) (४)^{३} \text{ ज्या } \left(\frac{४ + \text{न}}{२} \right) \frac{\pi}{८} य \right) \right\}$ इत्युत्तरम् ।

(१३) यदि २ = ज्याय० कोज्याय,

तदा लेब्निज् (Leibnitz) सिद्धान्तेन

$२^{\text{न}-१}$ × ज्या $\left(२य + \frac{\pi \cdot \text{न}}{२} \right)$ =

कोज्याय·ज्या$\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$ + न·ज्या $\left(य+\frac{न-१}{२}\pi\right)$

× कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$

+ न·$\left(\frac{न-१}{२}\right)$ × ज्या$\left(य+\frac{न-२}{२}\pi\right)$ × कोज्या $\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$

+ $\frac{न(न-१)(न-२)}{२\times३}$ × ज्या $\left(य+\pi\frac{न-३}{२}\right)$ ×

कोज्या$\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$

..... + ज्याय. कोज्या $\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$, इति कथम् ?

अथात्र कल्प्यते ज्याय = व, कोज्याय = ल, अतः $\frac{व}{ताय}$ = ल × व

ततोलेब्निज्सिद्धान्तेन—

$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}}$ = ल · $\frac{ता^{न}व}{ताय^{न}}$ + न · $\frac{ता^{न-१}व}{ताय^{न-१}}$ · $\frac{ताल}{ताय}$ +

$\frac{न(न-१)}{२}$ · $\frac{ता^{न-२}व}{ताय^{न-२}}$ × $\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}}$ + ... + व. $\frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}}$, इति स्यात् ।

परञ्चात्र ल = कोज्याय,

अतः $\frac{ताल}{ताय}$ = ज्याय = कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$,

$\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}}$ = — ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ = कोज्या$\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$,

$\frac{ता^{३}ल}{ताय^{३}}$ = — ज्या $\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$ = कोज्या$\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$,

अत्र यदि ३ = न, तदा—

$\frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}}$ = कोज्या$\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$, इति भवेत् ।

पुनश्च व = ज्याय, अतः $\frac{ताव}{ताय}$ = कोज्याय = ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$,

$\frac{ता^{२}व}{ताय^{२}}$ = कोज्या$\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ = ज्या $\left(य+\frac{\pi२}{२}\right)$,

$\frac{ता^{३}व}{ताय^{३}}$ = कोज्या$\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$ = ज्या $\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$,

$\frac{ता^{४}व}{ताय^{४}}$ = कोज्या $\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$ = ज्या $\left(य+\frac{४\pi}{२}\right)$,

अत्रैव यदि न = ४, तदा—

$\frac{ता^{न}व}{ताय^{न}}$ = ज्या $\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$,

$\frac{ता^{न-१}व}{ताय^{न-१}}$ = ज्या $\left(य+\frac{न-१}{२}\cdot\pi\right)$,

$\frac{ता^{न-२}व}{ताय^{न-२}}$ = ज्या $\left(य+\frac{न-२}{२}\pi\right)$,

$\frac{ता^{न-३}व}{ताय^{न-३}}$ = ज्या $\left(य+\frac{न-३}{२}\cdot\pi\right)$, इत्यादि ।

एतत्स्वरूपैरुत्थापिते लेब्निज् (Leibnitz) सिद्धान्ते जातम्—

$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}}$ = कोज्याय·ज्या $\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$ +

न · ज्या $\left(य+\frac{न-१}{२}\cdot\pi\right)$ · कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$

+ $\frac{न(न-१)}{२}$ · ज्या $\left(य+\frac{न-२}{२}\cdot\pi\right)$ · कोज्या $\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$

+ $\frac{न(न-१)(न-२)}{२\times३}$ · ज्या $\left(य+\frac{न-३}{२}\cdot\pi\right)$ · कोज्या $\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$

+ ..... + ज्याय · कोज्या $\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)$ ।

परञ्चात्र स = ज्याय · कोज्याय,

अतः $\frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}$ = कोज्या^{२}य − ज्या^{२}य = कोज्या२य = ज्या $\left(२य+\frac{\pi}{२}\right)$ ।

पुनरस्य तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन

$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}}$ = २ कोज्या $\left(२य+\frac{\pi}{२}\right)$ · २ज्या $\left(२य+\frac{२\pi}{२}\right)$,

एवञ्च $\frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताय}^{३}}$ = २ × २ कोज्या $\left(२य+\frac{\pi २}{२}\right)$ = ४ज्या $\left(य+\frac{\pi ३}{२}\right)$ =

२^{२}ज्या $\left(२य+\frac{\pi ३}{२}\right)$, इत्यादि ।

अत्र यदि ३ = न, तदा—

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ = २$^{\text{न}-१}$ × ज्या $\left(२य+\frac{\text{न}\cdot\pi}{२}\right)$, इति ।

अतः २$^{\text{न}-१}$ × ज्या $\left(२य+\frac{\text{न}\cdot\pi}{२}\right)$ =

कोज्याय · ज्या $\left(य+\frac{\text{न}\cdot\pi}{२}\right)$ + न · ज्या $\left(य+\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\pi\right)$.

कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$

$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}$ · ज्या $\left(य+\frac{\text{न}-२}{२}\cdot\pi\right)$ · कोज्या $\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$

$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{२\times३}$ · ज्या $\left(य+\frac{\text{न}-३}{३}\cdot\pi\right)$ · कोज्या $\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$

+ · · · · · · + ज्याय · कोज्या $\left(य+\frac{\text{न}\cdot\pi}{२}\right)$ । इत्युत्तरम् ।

(१४) यदि र = इ^{य} · ज्याय, तदा—

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ =

इ^{य} · $\left\{\text{ज्याय}+\text{न}\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\cdot\right.$

$\left.\text{ज्या}\left(य+\frac{२\pi}{२}+\cdots\right)\right\}$, इति कथम् १

प्रथमतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = इ^{य} · ज्याय + कोज्याय · इ^{य} = इ^{य} (ज्याय + कोज्याय) =

इ^{य} · $\left\{\text{ज्याय}+\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\right\}$ ।

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$ = इ^{य} · ज्याय + इ^{य} · कोज्याय + कोज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ इ^{य} +

इ^{य} · ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\Big\}$

= इ^{य} $\left\{\text{ज्याय}+\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+\text{ज्या}\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)+\right.$

$\left.\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\right\}$ =

इ^{य} $\left\{\text{ज्याय}+२\,\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+\text{ज्या}\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)\right\}$,

$\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}}$ = इ^{य} · ज्याय + इ^{य} · कोज्याय + २ इ^{य} · ज्या $\left(य+\frac{\pi}{२}\right)$ +

२ कोज्या $\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$ + इ^{य} · ज्या $\left(य+\frac{\pi २}{२}\right)$ +

इ^{य} · कोज्या $\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$ =

इ^{य} $\left\{\text{ज्याय}+३\,\text{इ}^{य}\cdot\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+३\,\text{ज्या}\left(य+\frac{\pi २}{२}\right)+\right.$

$\left.\text{ज्या}\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)\right\}$

अत्र यदि न = ३, तदा—

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{इ}^{\text{य}} \left\{ \text{ज्याय} + \text{न} \cdot \text{ज्या}\left(\text{य} + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२} \cdot \text{ज्या}\left(\text{य} + \frac{\pi}{२}\right) + \cdots\cdots \right\} \text{इत्युत्तरम् ।}$$

(१५) यदि र = $\text{इ}^{\text{य}} \cdot \text{य}^{\text{न}}$, तदा $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ =

$$\text{इ}^{\text{य}} \cdot \lfloor\text{न} \left\{ १ + \text{न} \cdot \text{य} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor२ \lfloor२} \cdot \text{य}^{२} + \right.$$

$$\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor३ \lfloor३} \cdot \text{य}^{३} +$$

$$\left. \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)(\text{न}-३)}{\lfloor४ \lfloor४} \cdot \text{य}^{४} + \cdots\cdots \right\} \text{इति कथम् ?}$$

अथात्र कल्प्यते $\text{य}^{\text{न}}$ = ल, $\text{इ}^{\text{य}}$ = व । तदा स = ल × व ।

ततोलेब्निज्सिद्धान्तेन—

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{व} \times \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}} + \text{न} \cdot \frac{\text{ता}^{\text{न}-१}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}} \cdot \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} +$$

$$\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२} \cdot \frac{\text{ता}^{\text{न}-२}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}} \times \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + \cdots\cdots +$$

$$\text{ल} \cdot \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{व}}{\text{ताय}^{\text{न}}} \text{, इति भवेत् ।}$$

ततोराश्योः पृथक् पृथक् तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \text{न} \cdot \text{य}^{\text{न}-१} \text{ । } \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} = \text{न}(\text{न}-१) \cdot \text{य}^{\text{न}-२} \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} = \text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२) \cdot \text{य}^{\text{न}-३} \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^{४}\text{ल}}{\text{ताय}^{४}} = \text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)(\text{न}-३) \cdot \text{य}^{\text{न}-४} \text{ ।}$$

अत्र यदि ४ = न, तदा—

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = ४ \times \times २ \times १ \text{ य} = \lfloor\text{न} \times १ \text{ ।}$$

द्वितीयराशेस्तात्कालिकसम्बन्धपरम्पराग्रहणेन—

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{व}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{इ}^{\text{य}} \text{, इत्येव भवेत् ।}$$

तत उत्थापिते लेब्निज्सिद्धान्ते जातम्—

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \lfloor\text{न} \times १ \times \text{इ}^{\text{य}} + \text{न} \times ४ \times ३ \times २ \times \text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}} +$$

$$\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२} \times ४ \times ३ \times \text{य}^{२} \cdot ३^{\text{य}}$$

$$+ \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor३} \times ४\text{य}^{३} \cdot \text{इ}^{\text{य}} + \cdots\cdots =$$

$$= \lfloor\text{न} \cdot \text{इ}^{\text{य}} + \text{न}\lfloor\text{न} \cdot \text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२ \times २} \cdot \lfloor\text{न} \cdot \text{य}^{२} \cdot \text{इ}^{\text{य}} +$$

$$\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor३ \times ३ \times २} \cdot \lfloor\text{न} \cdot \text{य}^{३} \cdot \text{इ}^{\text{य}} + \cdots\cdots =$$

$$\text{इ}^{\text{य}} \lfloor\text{न} \left\{ १ + \text{न} \cdot \text{य} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor२ \lfloor२} \cdot \text{य}^{२} + \right.$$

$$\left. \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor३ \lfloor३} \cdot \text{य}^{३} \text{, इत्युत्तरम् ।} \right.$$

(१६) यदि र = ज्याय, तदा—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{न}\text{र}}{\text{ताय}^{२}\text{न}}$ = र, इति कथम् ? यत्रात्र न सम संख्यास्ति ।

अथ तात्कालिकसम्बन्धपरम्पराग्रहणेन—

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय} = \text{ज्या}\left(\text{य} + \frac{\pi}{२}\right) \text{ ।}$$

$\frac{\text{ता}^{१}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \text{कोज्या}\left(\text{य}+\frac{\pi}{२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{य}+\frac{३\pi}{२}\right)$ ।

$\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} = \text{कोज्या}\left(\text{य}+\frac{२\pi}{२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{य}+\frac{४\pi}{२}\right)$ ।

$\frac{\text{ता}^{४}\text{र}}{\text{ताय}^{४}} = \text{कोज्या}\left(\text{य}+\frac{३\pi}{२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{य}+\frac{५\pi}{२}\right)$ ।

अत्रैव यदि न = २ तदा—

$\frac{\text{ता}^{२\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{२\text{न}}} = \text{ज्या}\left(\text{य}+\frac{२\text{न}\cdot\pi}{२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{य}+\frac{१८०^{\circ}\times४}{२}\right) =$

$\text{ज्या}\left(\text{य}+३६०^{\circ}\right) = \text{ज्याय} = \text{र}$, अतः $\frac{\text{ता}^{२\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{२\text{न}}} = \text{र}$,

इत्युत्तरम् ।

(१७) यदि र = रूप (लाय), अस्य कस्तात्कालिकसम्बन्धः ?

अथात्र $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{य}}\cdot\text{छे}^{२}\left(\text{लाय}\right) = \frac{\text{रूप}^{२}\left(\text{लाय}\right)+१}{\text{य}} = \frac{\text{र}^{२}+१}{\text{य}}$, इत्युत्तरम् ।

(१८) $\text{र} = \text{अ}\cdot\text{क}\cdot\overline{\text{रूप}}^{-१}\left(\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)$, तदा

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \frac{\text{कान}-१}{\text{अ}^{\text{न}-१}}\,\text{कोज्या}\left\{\left(\text{न}\cdot\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)+(\text{न}-१)\frac{\pi}{२}\right\}$

$\left\{\text{कोज्या}^{\text{न}}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)\right\}$, इति कथम् ।

अथ पक्षयोः प्रथमतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ}\cdot\text{क}\frac{१}{१+\frac{(\text{य}+\text{क})^{२}}{\text{अ}^{२}}}\times\frac{१}{\text{अ}} = \text{क}\cdot\frac{१}{१+\frac{(\text{य}+\text{क})^{२}}{\text{अ}^{२}}}$ ।

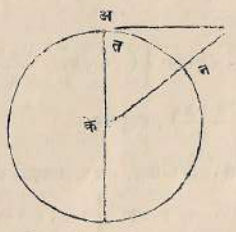
अत्रेदं $\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{(\text{य}+\text{क})}{\text{अ}}$, अस्य $\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}$ रूपशंचापमानमस्तीति द्योतयति ।

अथात्र कल्प्यते अक $= \frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}$, तदा, अत $= \overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{(\text{य}+\text{क})}{\text{अ}} = \text{त}$ ।

अतः रूपत $= \frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}$ अतः $\text{रूप}^{२}\text{त} = \frac{(\text{य}+\text{क})^{२}}{\text{अ}^{२}} = \text{अक}^{२}$ ।

अतः $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\cdot\frac{१}{१+\text{रूप}^{२}\text{त}} = \text{क}\cdot\frac{१}{\text{केक}^{२}} = \text{क}\cdot\frac{१}{\text{छे}^{२}\text{त}} =$

$\text{क}\cdot\frac{१}{\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{त}}} = \text{क}\cdot\frac{१}{\text{केाज्या}^{२}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{(\text{य}+\text{क})}{\text{अ}}\right)} =$



$\text{क}\cdot\text{कोज्या}^{२}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right) =$

$\text{क}\cdot\text{कोज्या}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\left(\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)\right)\cdot\text{कोज्या}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)$,

ततोद्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\,\text{क}\cdot\text{ज्या}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)\cdot\frac{१}{\text{छे}^{२}\left(\overline{\text{रूप}}^{-१}\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{अ}}\right)}\times$

$\frac{१}{अ} \times$ कोज्या$\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) =$

$\frac{क}{अ} \times$ ज्या$\left(\ २\ \text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) . \frac{१}{\text{छे}^{२}\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)} =$

$\frac{क}{अ} \times$ ज्या$\left(\ २\ \text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) . \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)} =$

$\frac{क}{अ} \times$ ज्या$\left(\ २\ \text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) \cdot$ कोज्या$^{२}\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) =$

$\frac{क१}{अ१} \times$ कोज्या $\left(\ २\ \text{रूप}^{-१}\frac{य+च}{अ} + \frac{त}{२}\right) \times$ कोज्या$^{२}\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)$

अत्रैव यदि न = २ तदा

$\frac{\text{ता}^{न}र}{\text{ताय}^{न}} = \frac{क\ \lfloor न-१}{\text{कृ}^{न-१}} \times$ कोज्या $\left\{\left(\ न \cdot \text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right) + (न-१)\frac{\pi}{२}\right\}$

$\times$ कोज्या$^{न}\left(\text{रूप}^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)$, इत्युत्तरम् ।

(१९) यदि $य = म \cdot$ रूप $(र - नय)$, अत्र य, घातवृद्धौ र, इस्य मानं किम् ?

यतः $य = म \cdot$ रूप $(\ २ - नय\ )$ अतः $\frac{य}{म} =$ रूप $(\ २ - नय\ )$,

$\text{रूप}^{-१}\frac{य}{म} = र - नय$, अतः $र = \text{रूप}^{-१}\frac{य}{म} + नय = स$ ।

ततोम्याक्करिन् (Maclurin) सिद्धान्तेन—

$स = त + त_{१}\ य + त_{२} \cdot \frac{य^{२}}{\lfloor २} + त_{३}\frac{य^{३}}{\lfloor ३} + त_{४}\frac{य^{४}}{\lfloor ४} + त_{५}\frac{य^{५}}{\lfloor ५} + \cdots\cdots$ ।

अतोऽत्र $\text{रूप}^{-१}\frac{य}{म} + नय = त + त_{१}\ य + त_{२}\frac{य^{२}}{\lfloor २} + त_{३}\frac{य^{३}}{\lfloor ३} +$

$त_{४}\frac{य^{४}}{\lfloor ४} + \cdots\cdots$ ।

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त = ०$ ।

तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}स}{\text{ताय}} = \frac{१}{१ + \frac{य^{२}}{म^{२}}} \times \frac{१}{म} + न = \frac{म}{म^{२} + य^{२}} + \cdots\cdots =$

$त_{१} + त_{२}\frac{२\ य}{\lfloor २} + \cdots\cdots$ ।

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त_{१} = \frac{१}{म} + न$ ।

पुनरस्य $\frac{म}{म^{२} + य^{२}} + न$, तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{२}स}{\text{ताय}^{२}} = -\frac{२\ मय}{(म^{२} + य^{२})^{२}} = त_{२} + त_{३}'\ य + त_{४} \cdot \frac{य^{२}}{२} + \cdots\cdots$

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त_{२} = ०$ ।

पुनस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{३}र}{\text{ताय}^{३}} = -\frac{२\ म\ (म^{२} + य^{२})^{२} + २\ यम \times २ \times २\ य\ (म^{२} + य^{२})}{(म^{२} + य^{२})^{४}} =$

$-\frac{२\ म\ (\ म^{२} + य^{२}\ ) + ८\ य^{२}\ म}{(\ म^{२} + य^{२}\ )^{३}} =$

$\frac{२\ म^{३} + २\ मय^{२} + ८\ य^{२} \cdot म^{२}}{(\ म^{२} + य^{२}\ )^{३}} = -\frac{२\ म^{३} + १०\ य^{२} म}{(\ म^{२} + य^{२}\ )^{३}}$,

अत्र यदि $य = ०$, तदा—

$त_{३} = \frac{२ म^{३}}{म^{६}} = \frac{२}{म^{३}}$, अत उत्थापिते

$र = (\ न - \frac{१}{म}\ ) य - \frac{१}{३\ म^{३}} \cdot य^{३} + \cdots\cdots$, इत्युत्तरम् ।

(२०) यदि य=म · ज्या (र+नय), अत्र य, घातवृद्धौ र, इत्यस्य किं मानम् ?

यतः य=म · ज्या (र+नय) अतः ज्या (र+नय)= $\frac{य}{म}$,

अतः ज्या $\frac{-१ य}{म}$ =र+नय, अतः र=ज्या $\frac{-१ य}{म}$ —नय,

ततोम्याक्लरिन् (Maclurin) सिद्धान्तेन—

ज्या $\frac{-१ य}{म}$ —नय=र=त+त$_१$ य+त$_२$ $\frac{य^२}{\lfloor २}$+त$_३$ $\frac{य^३}{\lfloor ३}$+

त$_४$ $\frac{य^४}{\lfloor ४}$+ त$_५$ $\frac{य^५}{\lfloor ५}$+·····,

अत्र यदि य=०, तदा त=०,

ततः $\frac{तार}{ताय}$ = $\frac{१}{\sqrt{१-\frac{य^२}{म^२}}}$ × $\frac{म}{म^२}$ —न = $\frac{१}{म\sqrt{१-\frac{य^२}{म^२}}}$ — न =

त$_१$ +त$_२$ $\frac{२य}{\lfloor २}$+त$_३$ $\frac{३ य^२}{\lfloor ३}$+त$_४$ $\frac{४ य^३}{\lfloor ४}$ +त$_५$ $\frac{५ य^४}{\lfloor ५}$ +···,

अत्र यदि य=०, तदा त$_१$ = $\frac{१}{म}$ —न

पुनर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^२र}{ताय^२}$ = $\frac{-म\frac{१}{२}\left(१-\frac{य^२}{म^२}\right)^{-\frac{३}{२}} \times \frac{२यम^२}{म^४}}{म^२\left(१-\frac{य^२}{म^२}\right)}$ =

$\frac{म\left(१-\frac{य^२}{म^२}\right)^{२}य}{२म^४\left(१-\frac{य^२}{म^२}\right)}$ = $\frac{म^२ · २य-२य^३}{२म^५-२म^३ · य^२}$ =

त$_२$ + त$_३$ $\frac{३ \times २ य}{\lfloor ३}$ +त$_४$ $\frac{४ \times ३य^२}{\lfloor ४}$ +त$_५$ $\frac{५ \times ४य^३}{\lfloor ५}$ +

अत्र यदि य= ०, तदा त$_२$= ०,

पुनस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^२र}{ताय^२}$ =

$\frac{(२म^२-६य^२)(म^४-३य^२ · म^२)+४म^३ · य(२म^२य-२य^३)}{(२म^५-२म^३ · य^२)^२}$ =

$\frac{४म^६-४य^२ · म^५-१२ य^२ · म^५+१२ य^४ · म^३+म^५ · य^२-८म^३ · य^४}{(२म^५-२म^३ · य^२)^२}$ =

= $\frac{४म^६-८म^५ · य^२+१०य^४ · म^३}{(२म^५-२म^३ · य^२)^२}$

= $\frac{४म^६-८म^५ · य^२+१०य^४ · म^३}{४म^{१०}-८म^३ · य^२+४य^४ · म^६}$

त$_३$+त$_४$ $\frac{४ \times ३ \times २य}{\lfloor ४}$ +त$_५$ $\frac{५ \times ४ \times ३य^२}{\lfloor ५}$ +····,

अत्र यदि य= ०, तदा त$_३$ = $\frac{१}{म^३}$, अत उत्थापिते ।

र= $\left(\frac{१}{म}-न\right)$य+ $\frac{१}{२}$ $\frac{य^३}{३म^३}$ +·····, इत्युत्तरम् ।

(२१) ३ इ^{य} +२, य घातवृद्धावल्प्य लघुरिकत्थं किम् ?

अतः र=ला (३ इ^{य}+२)=त+त$_१$य+त$_२$ $\frac{य^२}{\lfloor २}$+ ·····

अत्र यदि य=०, तदा—

ला (३ इ^{य}+२)=ला (३ इ^{०}+२)=ला ५=त ।

अथ $\frac{तार}{ताय}$ = $\frac{१}{३ इ^{य}+२}$ × ता (३ इ^{य} +२)=

$\frac{१}{३\,ई^{य}+२} \times ३\,ई^{य} = त_{१} + त_{२}\frac{य}{\lfloor २} + \cdots\cdots$

यतोऽस्य $ई^{य}$, तात्कालिकसम्बन्धपरम्पराग्रहणेन $ई^{य}$, इत्येव भवति ।

ततोऽत्र यदि $य=०$, तदा $त_{१} = \frac{१}{३\,ई^{०}+२} \times ३\,ई^{०} = \frac{३}{५}$,

पुनःसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = \frac{३\,ई^{य}\,(३\,ई^{य}+२) - ३ई^{य}\cdot ३\,ई^{य}}{(३\,ई^{य}+२)^{२}} = त_{२} + \cdots\cdots$,

अत्र यदि $य=०$, तदा $त_{२} = \frac{६}{२५}$, इत्यादि ।

उत्थापिते जातम्

$र = ल\,(३\,ई^{य}+२) = ला\ ९ + \frac{३य}{५} \times \frac{३य^{२}}{२५} + \cdots\cdots$ इत्युत्तरम् ।

(२२) यदि $र = ई^{य\cdot छेय}$, तदात्र य, घातवृद्धौ र, इत्यस्य किं मानम् ?

(Maclurin) सिद्धान्तेन

$र = ई^{य\cdot छेय} = त + त_{२}\,य + त_{३}\frac{य^{२}}{\lfloor २} + त_{४}\frac{य^{३}}{\lfloor ३} + \cdots$

अथ सम्बन्धग्रहणेन

$\frac{ता र}{ताय} = ई^{य\cdot छेय} \times \left(छेय + \frac{स्पय}{कोज्या}\right) =$

$ई^{य\cdot छेय}\,(छेय + स्पय\cdot छेय\cdot य)$

$= ई^{य\cdot छेय} \times छेय\,(१ + स्पय\cdot य) =$

$त_{१} + त_{२}\frac{२य}{\lfloor २} + त_{३}\frac{३य^{२}}{\lfloor ३} + \cdots$

अत्र यदि $य=०$, तदा $त_{१} = १$ ।

पुनः सम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = ई^{य\cdot छेय}\,(छेय + छेय\cdot स्पय)\ छे\,(१ + स्पय\cdot य)$

$+ ज्याय\cdot ई^{य\cdot छेय} \times (१ + स्पय\cdot य) + छे^{२}य\cdot य + स्पय)$

$छेय\cdot ई^{य\cdot छेय} = त_{२}$,

अत्र यदि $य=०$, तदा $त_{२} = १$,

उत्थापिते $र = १ + य + \frac{य^{२}}{\lfloor २} + \cdots\cdots$, इत्युत्तरम् ।

(२३) यदि $र = ला\,(१ + स्पय)$, तदा य घातवृद्धौ र इत्यस्य किं मानम् ?

ततोऽभ्याकलरिम् (Maclurin) सिद्धान्तेन—

$र = ला\,(१ + स्पय) = त + त_{१}\,य + त_{२}\frac{य^{२}}{\lfloor २} + त_{३}\frac{य^{३}}{\lfloor ३} + \cdots\cdots$

अत्र यदि $य=०$, तदा $त=०$,

ततः प्रथमसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता र}{ताय} = \frac{१}{१ \times स्पय} \times छे^{२}य = त_{१} + त_{२}\frac{२य}{\lfloor २} + त_{३}\frac{३य^{२}}{\lfloor ३} + \cdots\cdots$,

अत्र यदि $य=०$, तदा $त_{१} = १$,

ततोद्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = \frac{२\,छेय\cdot \frac{स्पय}{कोज्याय} - छे^{२}य\cdot छे^{२}य}{(१ + स्पय)^{२}} =$

$\frac{२\,छेय\cdot स्पय - कोज्याय\cdot छे^{३}य}{कोज्याय\,(१ + स्पय)^{२}} =$

$त_{२} + त_{३}\frac{३ \times २\ य}{\lfloor ३} + \cdots\cdots$,

अत्र यदि $य=०$, तदा $त_{२} = -१$,

ततस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{ता}^3 \text{र}}{\text{ताय}^3} =$$

$$\times \frac{\left\{ \text{कोज्याय}(१+\text{स्पय})^2 - [\text{ज्याय}(१+\text{स्पय})^2 + २(१+\text{स्पय})\text{छे}^2\text{य}\cdot\text{कोज्याय}] \right\}}{\text{कोज्याय}\,(\,१+\text{स्पय}\,)^8}$$

$$\left\{ \left(\frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}} \times \text{स्पय} + २\text{छे}^2\text{य}\cdot\text{छेय} \right) - \left(-\text{ज्याय}\cdot\text{छे}^8\text{य} + ४\text{छेय}\cdot\frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}}\cdot\text{कोज्याय} \right) \right\}$$

$$= \frac{\left\{ \left(\frac{२\,\text{स्प}^2\text{य}}{\text{कोज्याय}} + २\text{छे}^2\text{य} + \text{ज्याय}\cdot\text{छे}^8\text{य} - ४\text{छे}^2\text{य}\cdot\text{स्पय} \right)\text{कोज्याय}\cdot(१+\text{स्पय})^8 \right\}}{\text{कोज्याय}^2\,(\,१+\text{स्पय}\,)^8}$$

$$- \frac{\left\{ -\text{ज्याय}\,(\,१+\text{स्पय}\,)^2 + २\,(\,१+\text{स्पय}\,)\,\text{कोज्याय}\cdot (\,२\,\text{छेय}\cdot\text{स्पय} - \text{कोज्याय}\cdot\text{छे}^8\text{य}\,) \right\}}{\text{कोज्या}^2\text{य}\,(\,१+\text{स्पय}\,)^8}$$

$$= \text{त}_3 + \cdots\cdots,$$

अत्र यदि य = ०, तदा $\text{त}_3 = ४$,

उत्थापिते जातम्—

$$\text{ला}\,(\,१+\text{स्पय}\,) = \text{य} - \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{४\text{य}^3}{\underline{३}} - \cdots\cdots,$$

$$= \text{य} - \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{२\text{य}^3}{३} - \cdots\cdots, \text{इत्युत्तरम्}\,।$$

(२४) ला (ज्याय) अस्यमितिः

$$-\left\{ २\text{ज्या}^2\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) + २\,\text{ज्या}^8\text{य}\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) + \right.$$

$$\frac{८}{३}\,\text{ज्या}^6\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right)$$

$$\left. + \frac{१६}{४}\,\text{ज्या}^5\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) + \text{ज्या}^{१०}\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) + \cdots\cdots \right\}$$

इति कथम् ?

यतः $\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) =$

$$\text{ज्या}\frac{\pi}{४}\cdot\text{कोज्या}\frac{\text{य}}{२} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{४}\cdot\text{ज्या}\frac{\text{य}}{२} =$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}}\left(\text{कोज्या}\frac{\text{य}}{२} - \text{ज्या}\frac{\text{य}}{२}\right), \text{अतः}$$

$$\text{ज्या}^2\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right) =$$

$$\frac{१}{२}\left(\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{२} + \text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{२} - २\,\text{कोज्या}\frac{\text{य}}{२}\cdot\text{ज्या}\frac{\text{य}}{२}\right)$$

$$= \frac{१}{२}\,(\,१ - \text{ज्याय}\,), \text{अतः}$$

$$\text{ज्याय} = १ - २\text{ज्या}^2\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right), \text{अतः}$$

$$\text{ला}\,(\,\text{ज्याय}\,) = \text{ला}\left\{\left(१ - २\,\text{ज्या}^2\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right)\right\}\right.$$

परञ्चतुर्थाध्यायस्य ४१ तमपृष्ठे—

$$\text{ला}\,(\,१+\text{य}\,) = \text{य} - \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{\text{य}^3}{३} - \frac{\text{य}^4}{४} - \cdots\cdots,$$

अतः $\text{ला}\,(\,१-\text{य}\,) = -\,\text{य} - \frac{\text{य}^2}{२} - \frac{\text{य}^3}{३} - \frac{\text{य}^4}{४} + \cdots\cdots,$

अत्र यदि $य = २ \text{ ज्या}^{२} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right)$, तदा

$$\text{ला} \left(१ - २ \text{ ज्या}^{२} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) \right) = -२ \text{ ज्या}^{२} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) - \frac{४ \text{ ज्या}^{४} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right)}{२} - \frac{६ \text{ ज्या}^{६} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right)}{३} - \cdots\cdots =$$

$$- \left\{ २ \text{ ज्या}^{२} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) + २ \text{ ज्या}^{४} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) + २ \text{ ज्या}^{६} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) + \cdots\cdots \right\} \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(२५) $र = (\text{ज्याय})^{न}$, अस्य य घातवृद्धौ किमानम् ?

यतः $र = \text{ज्या}^{न} य$, अतः $र^{\frac{१}{न}} = \text{ज्याय} = य - \frac{य^{३}}{\lfloor ३} + \frac{य^{५}}{\lfloor ५} - \frac{य^{७}}{\lfloor ७} + \cdots$

$$= य \left\{ १ - \frac{य^{२}}{\lfloor ३} + \frac{य^{४}}{\lfloor ५} - \frac{य^{६}}{\lfloor ७} + \cdots\cdots, \right\}$$

अतः $र = य^{न} \left(१ - \frac{य^{२}}{\lfloor ३} + \frac{य^{४}}{\lfloor ५} - \frac{य^{६}}{\lfloor ७} + \cdots\cdots \right)^{न}$,

कल्प्यतेऽत्र $\left(\frac{य^{२}}{\lfloor ३} - \frac{य^{४}}{\lfloor ५} + \frac{य^{६}}{\lfloor ७} - \cdots \right) = क$,

तदा $र = य^{न} \cdot (१ - क)^{न}$, द्वियुक्पदसिद्धान्तेनास्य

$(१ - क)^{न}$ स्वरूपम्—

$$(१ - क)^{न} = १ - न क + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} क^{२} - \frac{न(न-१)(न-२)}{\lfloor ३} क^{३}$$

अतः $र = य^{न} (१ - न क + \cdots\cdots,$

$$य^{न} \left\{ १ - न \left(\frac{य^{२}}{\lfloor ३} - \frac{य^{४}}{\lfloor ५} + \frac{य^{६}}{\lfloor ७} - \cdots\cdots \right) + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} \left(\frac{य^{२}}{\lfloor ३} - \frac{य^{४}}{\lfloor ५} + \frac{य^{६}}{\lfloor ७} - \cdots\cdots \right)^{२} - \cdots\cdots \right\}$$

$$= य^{न} \left\{ \left(१ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + \frac{न \cdot य^{४}}{\lfloor ५} - \frac{न \cdot य^{६}}{\lfloor ७} + \cdots\cdots \right) + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} \times \frac{य^{४}}{\left(\lfloor ३\right)^{२}} + \cdots\cdots \right\} =$$

$$य^{न} \left\{ १ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + \frac{न \cdot य^{४}}{\lfloor ५} + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} \times \frac{नय^{६}}{३६} + \cdots\cdots \right\}$$

$$= य^{न} \left\{ \left(१ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{१}{\lfloor ५} + \frac{न-१}{\lfloor २ \times ३६} \right) + \cdots \right\} \right.$$

$$= य^{न} \left\{ \left(१ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{१}{१२०} + \frac{न-१}{७२} \right) + \cdots\cdots \right\} \right.$$

$$= य^{न} \left\{ १ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{३}{३६०} + \frac{५न-५}{३६०} \right) + \cdots\cdots \right\}$$

$$= य^{न} \left\{ १ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{५न-२}{३६०} \right) + \cdots\cdots \right\}$$

$$= य^{न} \left\{ १ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{५न-२}{३ \times १०} \right) + \cdots\cdots \right\}$$

$$= य^{न} \left\{ १ - \frac{न \cdot य^{२}}{\lfloor ३} + य^{४} \cdot न \left(\frac{५न-२}{३ \times \lfloor ५} \right) + \cdots\cdots \right\}$$

इत्युत्तरम् ।

(२६) यदि र = ला $\left\{ १ + (य^२ + कय \right\} =$

$$त + त_१ य + त_२ \frac{य^२}{\lfloor २} + त_३ \frac{य^३}{\lfloor ३} + त_४ \frac{य^४}{\lfloor ४} + \cdots\cdots$$

अत्र यदि य = ०, तदा त = ० ,

$$\text{ततः } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{१ + य^२ + कय} \times (२ य + क) = \frac{२ य + क}{१ + य^२ + कय} =$$

$$त_१ + त_२ \frac{२ य}{\lfloor २} + त_३ \frac{३ य^२}{\lfloor ३} + त_४ \frac{४ य^३}{\lfloor ४} + \cdots\cdot$$

अत्र यदि य = ० तदा $त_१ = क$ ।

पुनस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{ता^२ र}{ताय^२} = \frac{२ (१ + य^२ + कय) - (२ य + क) (२ य + क)}{(१ + य^२ + कय)^२} =$$

$$\frac{२ + २ य^२ + २ कय - ४ य^२ - २ कय - २ कय - क^२}{(१ + य^२ + कय)^२} =$$

$$\frac{२ - २ य^२ - २ कय - क^२}{(१ + य^२ + कय)^२} =$$

$$त_२ \times त_३ \frac{३ \times २ \times य}{\lfloor ३} + त_४ \frac{४ \times ३ य^२}{\lfloor ४} + \cdots\cdots\cdots ,$$

अत्र यदि य = ० तदा $त_१ = २ - क^२$ इति ।

तत पुनस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{ता^३ र}{ताय^३} =$$

$$\frac{(६ य - २ क) (१ + य^२ + कय)^२ - (२ य + क) (२ - ३ य^२ - ३ कय - क^२) \times २ (१ + य^२ + कय)}{(१ + य^२ + कय)^४}$$

$$= \frac{(६ य - २ क) (१ + य^४ + क^२ य^२ + २ कय + २ य^२ + २ कय^२)}{(१ + य^२ + कय)^४} -$$

$$\left\{ ४ य - ६ य^४ - ६ कय^२ - २ क^२ य + क^२ - ३ य^२ क - ३ क^२ य - क^३ \right\} \times \frac{२ (१ + य^२ + कय)}{(१ + य^२ + कय)^४}$$

$$= \frac{६ य + ६ य^५ + ६ क^२ य^३ + १२ कय^३ + १२ य^३ + १२ कय^४}{(१ + य^२ + कय)^४} -$$

$$\frac{२ क + २ कय^४ + २ क^३ य^२ + ४ क^२ य + ४ कय^२ + ४ क^२ य^३}{(१ + य^२ + कय)^४} -$$

$$\frac{(४ य - ६ य^४ - ९ कय^२ + ६ क^२ य + २ क - क^३) २ (१ + य^२ + कय)}{(१ + य^२ + कय)^४} =$$

$$= \frac{६ य + ६ य^५ + २ क^२ य^३ + ८ कय^२ + १२ य^३ + कय^४ १० - क २ - क^२ य ४}{(१ + य^२ + कय)^४}$$

$$- २ \left\{ \frac{५ य - ६ य^४ - ९ कय^२ + ६ क^२ य + २ क - क^३}{(१ + य^२ + कय)^४} + \right.$$

$$\frac{४ य^३ - ६ य^६ - ९ कय^४ + ५ क^२ य^३ + २ कय^३ - य^२ क^३}{(१ + य^२ + कय)^४} +$$

$$\left. \frac{४ कय^२ - ६ कय^३ - ९ क^२ य^३ + ५ क^३ य^३ + २ क^२ य \cdot - क^३}{(१ + य^२ + कय)^४} \right\}$$

$$= त_३ + \frac{४ \times ३ \times २ य}{\lfloor ४} + \cdots\cdots\cdots$$

अत्र यदि य = ० तदा $त_३ = २ क^३ - क ६ = २ क (क^२ - ३)$,

लेखविस्तरभयादत्रैवोत्थापितं समीकरणम् ।

$$\therefore \text{ला} \left\{ १ + (य^२ + कय) \right\} = कय + (२ - क^२) \frac{य^२}{२} + क (क^२ - ३) \frac{य^३}{३}$$

इत्युत्तरम् ।

(२७) यदि $र = ला\left\{ क\left(य + [१ + य^२]^{\frac{१}{२}} \right) \right\}$

अस्य तात्कालिकसम्बन्धः कः ?

म्याक्लरिन् (Maclurin) सिद्धान्तेन—

$$र = ला\left\{ क\left(य + [१ + य^२]^{\frac{१}{२}} \right) \right\} =$$

$$त + त_१ \; य + त_२ \frac{य^२}{\lfloor २} + त_३ \frac{य^३}{\lfloor ३} + त_४ \frac{य^४}{\lfloor ४} + \cdots\cdots\cdots$$

अत्र यदि $य = ०$ तदा $त = ला क$ ।

ततः प्रथमसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{क\left(य + [१ + य^२]^{\frac{१}{२}} \right)} \times$$

$$क\left(१ + \frac{१}{२}\left(१ + य^२ \right)^{-\frac{१}{२}} \times २ य \right) =$$

$$\frac{१}{क\left\{ य + \left(१ + य^२ \right)^{\frac{१}{२}} \right\}^{\frac{१}{२}}} \times \frac{१}{२} \times \frac{२ य क}{(१ + य^२)^{\frac{१}{२}}} =$$

$$\frac{क}{क\left\{ य + (१ + य^२)^{\frac{१}{२}} \times (१ + य^२)^{\frac{१}{२}} \right\}}$$

$$= त_१ + त_२ \frac{२य}{\lfloor २} + त_३ \frac{३य^२}{\lfloor ३} + त_४ \frac{४य^३}{\lfloor ४} + \cdots\cdots ,$$

अत्र यदि $य = ०$ तदा $त_१ = \frac{क}{क} = १$,

एव मग्रेऽपि—

अत उत्थापिते

$$ला\left\{ क\left(य + [१ + य^२]^{\frac{१}{२}} \right) \right\} =$$

$$ला क + य - \frac{य^३}{\lfloor ३} + \frac{१ \times ३ \times य^५}{२ \times ४ \times ५} - \cdots\cdots \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(२८) ला (१ + उज्याय), य घातवृद्धवल्य किं सानम् ?

म्याक्लरिन् (Maclurin) सिद्धान्तेन—

$$ला\,(१ + उज्याय) = स = त + त_१ \; य + त_२ \frac{य^२}{\lfloor २} + त_३ \frac{य^३}{\lfloor ३} + \cdots\cdots ,$$

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त = ०$,

ततः प्रथमसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{१}{१ + उज्याय} \times ज्याय = त_१ + त_२ \frac{२य}{\lfloor २} + त_३ \frac{३य^२}{\lfloor ३} + \cdots\cdots ,$$

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त_१ = ०$,

पुनर्द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} = \frac{कोज्याय\,(१ + उज्याय) - ज्या^२य}{(१ + उज्याय)^२}$$

$$= त_२ + त_३ \frac{३ \times २य}{\lfloor ३} + \cdots\cdots ,$$

अत्र यदि $य = ०$, तदा $त_२ = १$,

पुनस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{ता^३स}{ताय^३} =$$

$$\frac{\left\{ -(ज्याय \cdot (१ + उज्याय) + ज्याय \cdot कोज्याय - २ कोज्याय \cdot ज्याय \right\} \cdot (१ + उज्याय)^२}{(१ + उज्याय)^४}$$

$$- \frac{२ \; ज्याय (१ + उज्याय)}{(१ + उज्याय)^४} =$$

$$\frac{\left\{ -ज्याय \cdot (१ - उज्याय - ज्याय \cdot कोज्याय \right\} (१ + उज्याय) - २ \; ज्याय}{(१ + उज्याय)^३} =$$

$$\frac{\left\{ -ज्याय - ज्याय \cdot उज्याय - ज्याय \cdot कोज्याय \right\} (१ + उज्याय) - २ \; ज्याय}{(१ + उज्याय)^३} =$$

$$\frac{-\text{ज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{कोज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}-\text{ज्याय}\cdot\text{कोज्याय}\cdot\text{उज्याय}-२\ \text{ज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-३\text{ज्याय}-२\ \text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{कोज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}(१-\text{उज्याय})}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-३\ \text{ज्याय}-२\ \text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{कोज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}+\text{ज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-\text{उज्याय}-३\ \text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{कोज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-३\ \text{ज्याय}-३\ \text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}-\text{ज्याय}(१-\text{उज्याय})}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-४\ \text{ज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\text{उज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^3} =$$

$$\frac{-२\ \text{ज्याय}\,(२+\text{उज्याय})}{(१+\text{उज्याय})^3},$$

अत्र यदि य = ०, तदा त$_३$ = ०,

पुनस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{-२\ \text{कोज्याय}\,(२-\text{उज्याय})+२\ \text{ज्या}^2\text{य}\quad(१+\text{उज्याय})^3-३\ \text{ज्याय}\,(१+\text{उज्याय})^2+२\ \text{ज्याय}\,(२-\text{उज्याय})}{(१+\text{उज्याय})^5} =$$

$$\frac{-२\ \text{कोज्याय}\,(२-\text{उज्याय})+२\ \text{ज्या}^2\text{य}\quad(१+\text{उज्याय})-६\ \text{ज्या}^2\text{य}\,(२-\text{उज्याय})}{(१+\text{उज्याय})^4} =$$

$$\frac{-४\ \text{कोज्याय}+२\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्याय}+२\ \text{ज्या}^2\text{य}\quad(१+\text{उज्याय})-१२\ \text{ज्या}^2\text{य}+६\ \text{उज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^4} =$$

$$\frac{-४\ \text{कोज्याय}+२\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्याय}+२\ \text{ज्या}^2\text{य}+४\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्याय}-२\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}+२\ \text{ज्या}^2\text{य}\cdot\text{उज्याय}-१२\ \text{ज्या}^2\text{य}+६\ \text{उज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^4} =$$

$$\frac{-४\ \text{कोज्याय}+२\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्याय}-१०\ \text{ज्या}^2\text{य}+२\ \text{ज्या}^2\text{य}\cdot\text{उज्याय}-२\ \text{कोज्याय}\cdot\text{उज्या}^2\text{य}+६\ \text{उज्याय}}{(१+\text{उज्याय})^4} =$$

अत्र यदि य = ० तदा त ४ = −४ ।

उत्थापिते का $(१+\text{उज्याय}) = \frac{\text{य}^2}{\lfloor २} - \frac{\text{य}^4}{\lfloor ३} \cdots\cdots$, इत्युत्तरम् ।

(२९) यदि र = ला (छेय), तदाऽत्र य, घातवृद्धौ किं मानम् ?

र = ला (छेय) = त + त$_१$ य + त$_२$ $\frac{\text{य}^२}{\lfloor २}$ + त$_३$ $\frac{\text{य}^३}{\lfloor ३}$ + ... ,

अत्र यदि य = ०, तदा त = ०, ततः सम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{छय}} \times \frac{\text{रूपय}}{\text{कोज्याय}} = \text{रूपय}$, अत्रयदि य = ०, तदा त$_१$ = ०,

पुनरत्र सम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^२\text{र}}{\text{ताय}^२} = \text{छे}^२\text{य}$, अत्र यदि य = ०, तदा त २ = १,

पुनः सम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^३\text{र}}{\text{ताय}^३} = २ \times \frac{\text{रूपय}}{\text{कोज्याय}}$, अत्र यदि य = ०, तदा त$_३$ = ०,

पुनरस्य सम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{\text{ता}^{१}२}{\text{ताय}^{४}} = \frac{२\ \text{छे}^{२}\text{य}\cdot\text{कोज्याय}+२\ \text{ज्या}^{२}\text{य}\cdot\text{रूपय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}$, अत्र यदि य = ०, तदा

$\frac{२\ \text{छे}^{२}\text{य}\cdot\text{कोज्याय}+२\ \text{ज्या}^{२}\text{य}\cdot\text{रूपय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = २$, = त ४,

उत्थापिते "ध्याकलरिम्" सिद्धान्ते—

$२ = \text{ला}\ (\text{छेय}) = \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{य}^{४}}{३०४} + \cdots\cdots$, इत्युत्तरम् ।

$(३०)\ \text{लाय} = (\text{य}^{१} - \text{य}^{-१}) - \frac{१}{३}(\text{य}^{३} - \text{य}^{-३}) + \frac{१}{५}(\text{य}^{५} - \text{य}^{-५}) + \cdots\cdots\cdots$ इति कथम् ?

तथा तस्मादेव $\text{ज्याय} = \frac{१}{२}(\text{य} + \text{ज्या}२\text{य}) - \frac{१}{३}\text{ज्या}३\text{य} + \frac{१}{४}\text{ज्या}४\text{य} - \frac{१}{५}\text{ज्या}५\text{य} + \cdots\cdots\cdots\cdots$ इति कथम् ?

पूर्वं $\text{ला}\ (१+\text{य}) = \text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{य}^{३}}{३} - \frac{\text{य}^{४}}{४} + \cdots\cdots (१)$

इति सिद्धम् ।

अत्रैव यदि $\text{य} = \frac{१}{\text{य}}$ तदा—

$\text{ला}\ (१+\frac{१}{\text{य}}) = \frac{१}{\text{य}} - \frac{१}{२\text{य}^{२}} + \frac{१}{३\text{य}^{३}} - \frac{१}{४\text{य}^{४}} + \cdots\cdots (२)$

ततः (१) (२) समीकरणयोरन्तरे कृते—

$\text{ला}\ (१+\text{य}) - \text{ला}\ (१+\frac{१}{\text{य}}) = \text{ला}\frac{१+\text{य}}{१+\frac{१}{\text{य}}} = \text{लाय}$

$= \left\{\text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{य}^{३}}{३} - \frac{\text{य}^{४}}{४} + \cdots\cdots\right\} -$

$\left\{\frac{१}{\text{य}} - \frac{१}{२\text{य}^{२}} + \frac{१}{३\text{य}^{३}} - \frac{१}{४\text{य}^{४}} + \cdots\cdots\right\}$

$= \text{य} - \frac{१}{\text{य}} - \left(\frac{\text{य}^{२}}{२} - \frac{१}{२\text{य}^{२}}\right) + \left(\frac{१}{३\text{य}^{३}} + \frac{\text{य}^{३}}{३}\right) -$

$\left(\frac{१}{४\text{य}^{४}} + \frac{\text{य}}{४}\right) + \cdots\cdots\cdots =$

$(\text{य} - \text{य}^{-१}) - \frac{१}{२}(\text{य}^{२} - \text{य}^{-२}) + (\text{य}^{३} - \text{य}^{-३}) - \cdots\cdots\cdots$

इति प्रथमप्रश्नोत्तरम् ।

अथ द्वितीयप्रश्नस्योत्तरम्—

लघुरिक्थगणितेन—

$\text{ज्याय} = \frac{\text{ई}^{\text{iय}} - \text{ई}^{-\text{iय}}}{\text{i}२} + \cdots\cdots\cdots$,

तथा $\frac{\text{ला ई}^{\text{iय}}}{२\text{i}} = \frac{\text{ई}^{\text{iय}} - \text{ई}^{-\text{iय}}}{२\text{i}} - \frac{१}{२}$

$\left(\frac{\text{ई}^{२\text{iय}} - \text{ई}^{-२\text{iय}}}{२\text{i}}\right) + \cdots\cdots\cdots$,

अतः $\frac{\text{य}}{२} = \text{ज्याय} - \frac{१}{२}\text{ज्या}२\text{य} + \cdots\cdots\cdots\cdots$,

अतः $\text{ज्याय} = \frac{१}{२}(\text{य} + \text{ज्याय}) - \cdots\cdots\cdots\cdots$,

इत्युत्तरम् ।

(३१) यदि $\text{ज्याय} = \frac{१}{२}(\text{य} + \text{ज्या}२\text{य}) - \frac{१}{३}\text{ज्या}३\text{य} + \frac{१}{४}\text{ज्या}४\text{य} - \frac{१}{५}\text{ज्या}५\text{य} + \cdots\cdots$ इत्यस्ति ।

तदा $\text{कोज्याय} = \text{कोज्या}२\text{य} - \text{कोज्या}३\text{य} + \text{कोज्या}४\text{य} - \text{कोज्या}५\text{य} + \cdots\cdots$ इतिकथम् ?

अनयोः ज्याय $=\frac{1}{2}$ (य + ज्या२य) $-\frac{1}{3}$ ज्या३य $+\frac{1}{4}$ ज्या४य $-$
$\frac{1}{5}$ ज्या५य + ····,
प्रथमतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—
कोज्याय $=\frac{1}{2}$ + कोज्या२य—कोज्या३य + कोज्या४य—
कोज्या५य + ·····, इत्युत्तरम् ।

(३२) $\frac{य^{न} \cdot \text{ला}\ (य^{२}+य+१)}{न+१}$,

अस्य य घातवृद्धौ म्याकलरिन् सिद्धान्तेन प्रथमपदस्य किं मानम् ?

यतः पूर्वं ला (य + १) $= य - \frac{य^{२}}{२} + \frac{य^{३}}{३} - \frac{य^{४}}{४} + \cdots\cdots$,

अत्र यदि य $= (य^{२}+य)$, इति कल्प्यते तदा—

ला $(य^{२}+य+१) = (य^{२}+य) - \frac{(य^{२}+य)^{२}}{२} +$
$\frac{(य^{२}+य)^{३}}{३} - \frac{(य^{२}+य)^{४}}{४} + \cdots\cdots\cdots$,

अतः $\frac{य^{न} \cdot (य^{२}+य+१)}{न+१} =$

$\frac{य^{न}}{न+१}\left\{ (य^{२}+य) - \cdots\cdots \right\} =$

$\frac{य^{न} \cdot य \cdot \left\{ (य+१) - \cdots\cdots \right\}}{न+१} =$

अत्रोऽन्त्र प्रथमपदप्रमाणम् $= \frac{य^{न+१}}{न+१}$, इत्युत्तरम् ।

(३३) $र = य \cdot \overline{\text{ज्या}}^{-१} य \cdot \overline{\text{रूप}}^{-१} य$, "म्याकलरिन्" सिद्धान्तेन यद्यातवृद्धावानीते माने तृतीयपदस्य किं मानम् ?

अत्रास्य "$य \cdot \overline{\text{ज्या}}^{-१} य \cdot \overline{\text{रूप}}^{-१} य$" तात्कालिकपरम्पराग्रहणेन—
सप्तमवारागततात्कालिकसम्बन्धेनोत्तरं भवति किमत्र लेखबाहुल्येनेति ।

(३४) यदि $र = \sqrt{१ - \text{कोज्याय}}$, अस्य यद्यातवृद्धौ किं मानम् ?

यतः कोज्याय $=$ कोज्या $\left(\frac{य}{२} + \frac{य}{२} \right) =$ कोज्या$^{२}\frac{य}{२} -$ ज्या$^{२}\frac{य}{२}$

$= १ - २$ ज्या$^{२}\frac{य}{२}$, अतः $१ - \text{कोज्याय} = २$ ज्या$^{२}\frac{य}{२}$

अतः $\sqrt{१ - \text{कोज्याय}} = \sqrt{२} \cdot$ ज्या $\frac{य}{२}$

किन्तु ज्याय $= य - \frac{य^{३}}{\lfloor ३} + \frac{य^{५}}{\lfloor ५} - \cdots\cdots$,

अत्र यदि य $= \frac{य}{२}$, इति कल्प्यते तदा—

ज्या $\frac{य}{२} = \frac{य}{२} - \frac{(\frac{य}{२})^{३}}{\lfloor ३} + \frac{(\frac{य}{२})^{५}}{\lfloor ५} - \cdots\cdots\cdots =$

$\frac{य}{२} - \frac{य^{३}}{८ \times \lfloor ३} + \frac{य^{५}}{३२ \times \lfloor ५} - \cdots\cdots$

अतः $\sqrt{१ - \text{कोज्याय}} = \sqrt{२}\left\{ \frac{य}{२} - \frac{य^{३}}{८\lfloor ३} + \frac{य^{५}}{३२\lfloor ५} - \cdots \right\}$

इत्युत्तरम् ।

(३५) यदि चापमानमत्यल्पं तदा स्वल्पान्तरात् चाप $=$
$३\sqrt{२}$ (रूपय–ज्याय), इति कथम् ?

अत्र कल्प्यते चापमानं $= य$,

पूर्वं ज्याय $= य - \frac{य^{३}}{\lfloor ३} + \frac{य^{५}}{\lfloor ५} - \cdots\cdots\cdots$,

तथा स्फय $= य + \frac{य^३}{३} + \frac{२ य^५}{३ \times ५} + \ldots\ldots\ldots$,

अत्र यदि य मानमत्यल्पं कल्प्यते तदा—

ज्याय $= य - \frac{य^३}{\lfloor ३} \cdot$ स्फय $= य + \frac{य^३}{३}$ ।

स्वल्पान्तरादग्रिमस्वरूपाणि त्यज्यानि ।

अतः स्फय—ज्याय $= \left(य + \frac{य^३}{३} \right) - \left(य - \frac{य^३}{\lfloor ३} \right) = \frac{३ य^३}{३ \times २} = \frac{य^३}{२}$,

अतः $य^३ = २$ (स्फय—ज्याय), अतः $य = \sqrt[३]{२ \text{ (स्फय—ज्याय)}}$,

इत्युत्तरम् ।

(३६) डेमाइवरसिद्धान्तेन—

कोज्या$^{म} य = \frac{म(म-१)}{२}$. कोज्या$^{म-२} य$. ज्या$^{२} य \mp$

$\frac{म(म-१)(म-२)(म-३)}{\lfloor ४}$. कोज्या$^{म-४} य$. ज्या$^{४} य \mp$

$\ldots\ldots\ldots + (-१)^{\frac{म}{२}}$. ज्या$^{म} य =$ कोज्यामय ।

तथा $\pm$ म . कोज्या$^{म-१} य$. ज्याय $\mp \frac{म(म-१)(म-२)}{\lfloor ३}$. कोज्या$^{म-३} य$

ज्या$^{३} य \pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)(म-४)}{\lfloor ५}$. कोज्या$^{म-५} य$. ज्या$^{५} य$

$= \pm$ ज्यामय इति कथम् ? यद्यत्र म समसंख्यास्यात्तदा ।

डेमाइवर सिद्धान्तेन—

(कोज्याय + ज्याय)^{म} = कोज्यामय + i ज्यामय,

द्विपदसिद्धान्तेन—

(कोज्याय + i ज्याय)^{म} = कोज्या$^{म} य$ + म . कोज्या$^{म-१} य$ i ज्याय

$\pm \frac{म \cdot (म-१)}{१ \times २}$ कोज्या$^{म-१} य$. i^{२}ज्या$^{२} य$

$\frac{म (म-१) (म-२)}{१ \times २ \times ३}$. कोज्या$^{म-३} य$. i^{३}ज्या$^{३} य +$

$\frac{म (म-१) (म-२) (म-३)}{१ \times २ \times ३ \times ४}$. कोज्या$^{म-४} य$. i^{४}ज्या$^{४} य +$

$\ldots\ldots\ldots + i^{म}$. ज्या$^{म} य$ ।

तथा (कोज्याय—i ज्याय)^{म} =

कोज्या$^{म} य$ — म . कोज्या$^{म-१} य$. i ज्याय +

$\frac{म (म-१)}{१ \times २}$. कोज्या$^{म-२} य$. i^{२}ज्या$^{२} य$ —

$\frac{म (म-१) (म-२)}{१ \times २ \times ३}$. कोज्या$^{म-३} य$. i^{३}ज्या$^{३} य +$

$\frac{म (म-१) (म-२) (म-३)}{१ \times २ \times ३ \times ४}$. कोज्या$^{म-४} य$. i^{४}ज्या$^{४} य$ —

$\ldots\ldots\ldots + i^{म}$. ज्या$^{म} य$,

पक्षयोर्योगेकृते—

२ कोज्यामय = २ कोज्या$^{म} य + २ \cdot \frac{म (म-१)}{१ \times २}$.

कोज्या$^{म-२}$ म . i^{२} . ज्या$^{२} य$

$+ २ \cdot \frac{म (म-१) (म-२) (म-३)}{\lfloor ४}$.

कोज्या$^{म-४} य$. ४ i ४ ज्या$^{४} य + \ldots\ldots + २ i^{म}$. ज्या$^{म} य$ ।

यतः $i = \sqrt{-१}$) अतः—

कोज्यामय = कोज्या$^{म} य + \frac{म (म-१)}{२}$.

कोज्या$^{म-२}$ य · $(\sqrt{-१})^{२}$ · ज्या^{२}य

$+\frac{म(म-१)(म-२)(म-३)}{\lfloor ४}$ · कोज्या$^{म-४}$य ·

$(\sqrt{-१})^{४}$ · ज्या^{४}य + $(\sqrt{-१})^{म}$ · ज्या^{म}य ,

अत्र यदि म समसंख्याष्टभिः समा तदा—

कोज्यामय = कोज्या^{म}य $\mp \frac{म(म-१)}{२}\times$

कोज्या$^{म-२}$य · ज्या^{२}य $\pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)}{\lfloor ४}\times$

कोज्या$^{म-४}$य · ज्या^{४}य $\mp$ ····· $+(-१)^{\frac{म}{२}}$ · ज्या^{म}य

इत्युत्तरम् ।

अथ पूर्वानीतपक्षयोरन्तरे कृते सति ।

$\pm$ज्यामय = $\pm$ म · कोज्या$^{म-१}$य · ज्याय $\mp \frac{म(म-१)(म-२)}{\lfloor ३}\times$

कोज्या$^{म-३}$य · ज्या^{३}य $\mp$

$\frac{म(म-१)(म-२)(म-३)(म-४)}{\lfloor ५}\times$

$^{म-५}$ज्या^{५}य $\mp$ ····· , इत्युत्तरमायाति ।

$= \frac{१}{२^{४}-१} + \frac{१}{२^{४}\cdot २^{२}-१} +$

····· इति कथम् ?

$\frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}} = \frac{१}{य} - \frac{\frac{२य}{\pi^{२}}}{१-\frac{य^{२}}{\pi^{२}}} - \frac{\frac{२य}{२^{२}\pi^{२}}}{१-\frac{य^{२}}{२^{२}\cdot\pi^{२}}} - \frac{\frac{२य}{३^{२}\cdot\pi^{२}}}{१-\frac{य^{२}}{३^{२}\cdot\pi^{२}}} - \cdots =$

$\frac{१}{य} - २य\left(\frac{१}{\pi^{२}-य^{२}} + \frac{१}{२^{२}\cdot\pi^{२}-य^{२}} + \frac{१}{३^{२}\cdot\pi^{२}-य^{२}} + \cdot\right) =$

$\frac{१}{रूपय} = \frac{४}{\pi} - \frac{२\pi}{२^{२}}\left(\frac{१}{\pi^{२}-\frac{\pi^{२}}{२^{४}}} + \frac{१}{२^{२}\cdot\pi^{२}-\frac{\pi^{२}}{२^{४}}} + \right.$

$\left. \frac{१}{३^{२}\pi^{२}-\frac{\pi^{२}}{२^{४}}} + \cdots\cdots\right)$

अत्र यदि य = $\frac{\pi}{४}$, तदा—

$\frac{४}{\pi} - \frac{२}{४\pi}\left(\frac{२^{४}}{२^{४}-१} + \frac{२^{४}}{२^{२}\cdot२^{४}-१} + \frac{२^{४}}{३^{२}\cdot२^{४}-१} + \right.$

$\left.\cdots\cdots\right) = \frac{१}{१} = १ ,$

अतः—

$\frac{२}{४\pi}\left(\frac{२^{४}}{२^{४}-१} + \frac{२^{४}}{२^{४}\cdot२^{२}-१} + \frac{२^{४}}{३^{२}\cdot२^{४}-१} + \cdots\right)$

$= \frac{४}{\pi} - १$

$\frac{३२}{४\pi} \times \left(\frac{१}{२^{४}-१} + \frac{१}{२^{४}\cdot२^{२}-१} + \right.$

$\left.\frac{१}{३^{२}\cdot२^{४}-१} + \cdots\cdots\right) = \frac{४-\pi}{\pi}$, अतः—

$\frac{१}{२^{४}-१} + \frac{१}{२^{२}\cdot२^{४}-१} + \cdots\cdots = \frac{४\pi}{३२}\left(\frac{४-\pi}{\pi}\right)$

$= \frac{१६-\pi४}{३२} = \frac{४-\pi}{८}$, इत्युत्तरम् ।

(३८) $\pi \cdot \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} =$

$2^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}+\frac{1}{65}+\cdots\cdots\right\}$ इति कथम् ?

४७ तमपृष्ठे

$$\frac{\pi}{2p}\times\frac{e^{2\pi\cdot}+1}{e^{\pi p}-1}-\frac{1}{2p^2}=$$

$$\frac{1}{1^2+p^2}+\frac{1}{2^2+p^2}+\frac{1}{3^2+p^2}+\cdots\cdots,$$

अत्र यदि $p=\frac{1}{2}$, तदा—

$$\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{2}}\times\frac{e^{2\pi\cdot\frac{1}{2}}+1}{e^{2\pi\cdot\frac{1}{2}}-1}-\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\cdots\cdots$$

$$=\pi\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}-\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}+\frac{4}{17}+\frac{4}{37}+\cdots\cdots\cdots,$$

अतः

$$\pi\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}=2+\frac{2^2}{5}+\frac{2^2}{17}+\frac{2^2}{37}+\cdots\cdots\cdots=$$

$$\frac{2^2}{2}+\frac{2^2}{5}+\frac{2^2}{17}+\frac{2^2}{37}+\cdots\cdots\cdots=$$

$2^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}+\cdots\cdots\cdots\right\}$ इत्युत्तरम् ।

(३९) $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}+\cdots\cdots\cdots$, इति कथम् ?

४८ तम पृष्ठे $\frac{\text{ज्याय}}{\text{काज्याय}}=$ रूपय $=$

$$\frac{\frac{8y}{\pi^2}}{1-\frac{2^2\cdot y^2}{\pi^2}}+\frac{\frac{8y}{3^2\cdot\pi^2}}{1-\frac{2^2\cdot y^2}{3^2\cdot\pi^2}}+\frac{\frac{8y}{5^2\cdot\pi^2}}{1-\frac{2^2\cdot y^2}{5^2\cdot\pi^2}}+\cdots=$$

$$\frac{2^2y}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-2^2y^2}+\frac{\pi^2}{3^2\cdot\pi^2-2^2\cdot y^2}+\right.$$

$$\left.\frac{\pi^2}{5^2\cdot\pi^2-2^2\cdot y^2}+\cdots\cdots\right)=$$

$$8y\left(\frac{1}{\pi^2-2^2\cdot y^2}+\frac{1}{3^2\cdot\pi^2-2^2\cdot y^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{5^2\cdot\pi^2-\frac{2^2\cdot\pi^2}{4}}+\cdots\cdots\right)=$$

अत्र यदि $y=\frac{\pi}{4}$, तदा—

$$\text{रूपय}=\frac{8\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi^2-\frac{2^2\cdot\pi^2}{4}}+\frac{1}{3^2\cdot\pi^2-\frac{2^2\cdot\pi^2}{4}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5^2\cdot\pi^2-\frac{2^2\cdot\pi^2}{4}}+\cdots\cdots\right.$$

$$=\frac{8\pi}{4\pi^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{5^2-\frac{1}{4}}+\cdots\cdots\right.=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2^2}{2^2-1}+\frac{2^2}{3^2\cdot2^2-1}+\frac{2^2}{5^2\cdot2^2-1}+\cdots\cdots\right.=$$

$$= \frac{८}{\pi}\left(\frac{१}{४-१} + \frac{१}{३६-१} + \frac{१}{१००-१} + \cdots\cdots\right) =$$

$$\frac{८}{\pi}\left(\frac{१}{३} + \frac{१}{३५} + \frac{१}{९९} + \cdots\cdots\right) = \text{स्पष्ट} = १$$

अतः

$$\frac{\pi}{८} = \frac{१}{३} + \frac{१}{३५} + \frac{१}{९९} + \cdots\cdots\cdots, \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(४०) $$\frac{\pi^२}{१६}\left\{\frac{१}{३^२} + \frac{१}{५^२} + \frac{१}{३^३५} + \frac{१}{३^३७} + \cdots\right\} \times$$

$$\left\{\frac{१}{३^२} + \frac{१}{३^२५} + \frac{१}{३^३९} + \frac{१}{५^२७} + \frac{१}{७^२९} + \right\} \text{ इति कथम् ।}$$

अथ ४७ तमपृष्ठीय १२ पंक्तिस्थस्वरूपेऽस्मिन्—

$$\frac{\pi}{२य} \cdot \frac{ई^{२\pi य} + १}{ई^{२\pi य} - १} = \frac{१}{२य^२} + \frac{१}{१^२ + य^२} + \frac{१}{२^२ + य^२} +$$

$$\frac{१}{३^२ + य^२} + \cdots\cdot,$$

अत्र यदि $य = \frac{१}{२}$ तदा—

$$\frac{\pi}{२ \times \frac{१}{२}} \cdot \frac{ई^{२\pi \cdot \frac{१}{२}} + १}{ई^{२\pi \cdot \frac{१}{२}} - १} = \frac{१}{२ \times \frac{१}{४}} + \frac{१}{१^२ + \frac{१}{४}} + \frac{१}{२^२ + \frac{१}{४}} +$$

$$\frac{१}{३^२ + \frac{१}{४}} + \cdots\cdot =$$

$$\pi \cdot \frac{ई^{\pi} + १}{ई^{\pi} - १} = २ + \frac{४}{९} + \frac{४}{३५} + \frac{४}{३३} + \cdots\cdot =$$

$$\frac{\pi}{४} \cdot \frac{ई^{\pi} + १}{ई^{\pi} - १} = \frac{१}{२} + \frac{१}{९} + \frac{१}{३५} \times \frac{१}{३३} + \cdots (१), \text{ इति ।}$$

ततः ४९ तमपृष्ठीय ४ पंक्तिस्थस्वरूपेऽस्मिन्—

$$\frac{\pi}{४य} \cdot \frac{ई^{\pi य} - १}{ई^{\pi य} + १} = \frac{१}{१^२ + य^२} + \frac{१}{३^२ + य^२} + \frac{१}{५^२ + य^२} +$$

$$\frac{१}{७^२ + य^२} + \frac{१}{९^२ + य^२} + \cdots\cdot,$$

अत्र यदि $य = १$ तदा =

$$\frac{\pi}{४} \cdot \frac{ई^{\pi} - १}{ई^{\pi} + १} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{३५} + \frac{१}{८०} + \frac{१}{१३५} + \cdots (२)$$

ततः (१) (२) समीकरणयोर्योते कृते—

$$\frac{\pi^२}{१६} = \left\{\frac{१}{३^२} + \frac{१}{५^२} + \frac{१}{३^३५} + \frac{१}{३^३७} + \cdots\cdot\right\} \times$$

$$\left\{\frac{१}{३^२} + \frac{१}{३^२५} + \frac{१}{३^३९} + \frac{१}{५^२७} \times \frac{१}{७^२९} + \cdots\cdot\right\} \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(४२) टेलर सिद्धान्तेन—

$$\overline{ज्या}^{१}_{२}\, य = \overline{ज्या}^{१} य + \frac{य}{\sqrt{१ - य^२}} + \frac{१}{२} \cdot \frac{य^३}{(१-य^२)^{\frac{३}{२}}} +$$

$$\frac{१ + २य^२}{(१+य^२)^{\frac{५}{२}}} \cdot \frac{य^५}{\lfloor ५} + \cdots\cdots\cdot \text{ इति कथम् ?}$$

अथात्र $\overline{ज्या}^{१}_{२}\, य = \overline{ज्या}^{१}(य + य) = फ(य)$,

ततः टेलरसिद्धान्तेन—

$$\overline{ज्या}^{१}(य + य) = \overline{ज्या}^{१} य + य \cdot \frac{ता(\overline{ज्या}^{१} य)}{ताय} + \frac{य^२}{\lfloor २} \cdot$$

$$\frac{\text{ता}^{१}(\overline{\text{ज्या}}^{१}\,\text{य})}{\text{ताय}^{१}}+\frac{\text{य}^{२}}{\lfloor २}\cdot\frac{\text{ता}^{२}(\overline{\text{ज्या}}^{१}\text{य})}{\text{ताय}^{२}}+\frac{\text{य}^{३}}{\lfloor ३}\cdot$$

$$\frac{\text{ता}^{४}(\overline{\text{ज्या}}^{१}\text{य})}{\text{ताय}^{४}}+\cdots\cdots,$$

अत्र $\overline{\text{ज्या}}^{१}\text{य}=\text{फ}(\text{य})$, अतः

$$\text{फ}^{\text{I}}(\text{य})=\frac{१}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}}\;।\;\text{फ}^{\text{II}}(\text{य})=\frac{-\frac{१}{२}\times(१-\text{य}^{२})^{-\frac{१}{२}}}{१-\text{य}^{२}}\times२\,\text{य}=$$

$$=\frac{(१-\text{य}^{२})^{-\frac{१}{२}}}{१-\text{य}^{२}}\times\text{य}=\frac{१}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}}\times\frac{१}{१-\text{य}^{२}}=\frac{\text{य}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}}\;।$$

$$\text{फ}^{\text{III}}(\text{य})=\frac{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}+\frac{३}{२}(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}-१}\times२\,\text{य}\times\text{य}}{\left\{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}\right\}^{२}}$$

$$\frac{\sqrt{१-\text{य}^{२}}\times(१-\text{य}^{२})+\frac{३}{२}(१-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\times२\,\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})^{३}}$$

$$\frac{\sqrt{१-\text{य}^{२}}(१-\text{य}^{२})+\frac{३}{२}\sqrt{१-\text{य}^{२}}\times२\,\text{य}^{२}}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}\times\sqrt{१-\text{य}^{२}}\times(१-\text{य}^{२})^{२}}=$$

$$\frac{१-\text{य}^{२}+३\,\text{य}^{२}}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}(१-\text{य}^{२})^{२}}=\frac{१-\text{य}^{२}+३\,\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{५}{२}}\times(१-\text{य}^{२})^{२}}=$$

$$\frac{१+२\,\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}+२}}=\frac{१+२\,\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{५}{२}}}\;।\;\text{एवञ्च}$$

$$\text{फ}^{\text{III}}(\text{य})=\frac{४\,\text{य}(१-\text{य}^{२})^{\frac{५}{२}}+\frac{५}{२}(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}(१+\text{य}^{२})\times२\,\text{य}}{(१-\text{य}^{२})^{४}}$$

$$=\frac{४\,\text{य}(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}+१}+\frac{५}{२}(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}\cdot(१+\text{य}^{२})\times२\,\text{य}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}+\frac{७}{२}}}$$

$$=\frac{४\,\text{य}(१-\text{य}^{२})+\frac{५}{२}(१+\text{य}^{२})\times\text{य}\,२}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}=$$

$$\frac{९\,\text{य}(१+\text{य}^{२})+४\,\text{य}(१-\text{य}^{२})}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}$$

$$\frac{१३\,\text{य}+\text{य}^{३}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}\;\frac{१०+४\,\text{य}-४\,\text{य}^{३}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}=\frac{९\,\text{य}+६\,\text{य}^{३}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}=\frac{३\,\text{य}(३+२\text{य}^{२})}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}$$

अतः $\overline{\text{ज्या}}^{१}\,२\,\text{य}=\overline{\text{ज्या}}^{१}\,\text{य}+\frac{\text{य}}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}}+\frac{\text{य}^{३}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}}\times\frac{१}{२}+$

$$\frac{१+२\,\text{य}^{२}\cdot\text{य}^{३}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{५}{२}}\cdot\lfloor३}+$$

$$\frac{३\,\text{य}(३+\text{य}^{२}\cdot२)\cdot\text{य}^{४}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}\times\lfloor४}+\cdots\cdots\text{इत्युत्तरम्}$$

(४३) यदि $\text{र}=\overline{\text{कोज्या}}^{१}(\text{य}+\text{च})$ तदा

$$\text{र}=\overline{\text{ज्या}}^{१}\left(१-\text{य}^{२}\right)^{\frac{१}{२}}=\frac{\text{च}}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}}-\frac{\text{च}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}}\cdot\;\text{४}$$

$$\frac{\text{च}^{२}}{\lfloor२}-\frac{१+२\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{५}{२}}}\cdot\frac{\text{च}^{३}}{\lfloor३}-$$

$$\frac{३\text{य}(३+२\text{य}^{२})}{(१-\text{य}^{२})^{\frac{७}{२}}}\cdot\frac{\text{च}^{४}}{\lfloor४}-\cdots\cdots\text{इति कथन ?}$$

अत्र टेलरसिद्धान्तेन—

$$\text{र}=\overline{\text{कोज्या}}^{१}(\text{य}+\text{च})=\overline{\text{कोज्या}}^{१}\,\text{य}+\text{च}\cdot\frac{\text{ता}(\overline{\text{कोज्या}}^{१}\text{य})}{\text{ताय}}+$$

$$\frac{\text{च}^{२}}{\lfloor२}\cdot\frac{\text{ता}^{२}(\overline{\text{काज्या}}^{१}\text{य})}{\text{ताय}^{२}}+\frac{\text{च}^{३}}{\lfloor३}\cdot\frac{\text{ता}^{३}(\overline{\text{कोज्याय}}^{१}\text{य})}{\text{ताय}^{३}}-$$

$\frac{च^४}{\lfloor ४}\cdot\frac{ता^४\ (\overline{कोज्या}^{१}\ य)}{ताय^४}+\cdots\cdots\cdots,$

अत्र फ (य) = $\overline{कोज्या}^{१}$ य अतः

$फ^{१}(य)=-\frac{१}{\sqrt{१-य^२}}$ । $फ^{॥}(य)=$

$\frac{-\frac{१}{२}\ (१-य^२)^{-\frac{३}{२}}\times-२य}{१-य^२}=$

$\frac{\frac{३}{२}\ (य-य^२)^{\frac{३}{२}}\times २य}{१-य^२}=$

$\frac{य}{\sqrt{१-य^२}\times(१-य^२)}=\frac{य}{(१-य^२)^{\frac{३}{२}}}$

अतः $\overline{कोज्या}^{१}$ (य+च) =

$\overline{कोज्या}^{१}$ य + $\frac{च}{\sqrt{१-य^२}}+\frac{य\cdot च^२}{(१-य^२)^{\frac{३}{२}}}+\cdots\cdots,$

अत्र यदि ल = $\overline{कोज्या}^{१}$ य तदा कोज्या ल = य ।

अतः $\sqrt{१-कोज्या^२ल}=\sqrt{१-य^२}$ = ज्याल, अतः

$\overline{ज्या}^{१}\sqrt{१-य^२}$ = ल = $\overline{कोज्या}^{१}$ (य+च) =

$\overline{ज्या}^{१}(१-य^२)^{\frac{१}{२}}+\frac{च}{\sqrt{१-य^२}}+\frac{य\cdot च^२}{(१-य^२)^{\frac{३}{२}}}+\cdots\cdot$

इत्युत्तरम् ।

(४४) यदि र = छे (य+च), तदा—

छे (य+च) = छेय + $छे^२य\cdot ज्याय\cdot च+छे^२य\ (१+ज्या^२य)\cdot\frac{च^२}{\lfloor २}+\cdots\cdot$ इति कथम् ?

अथ टेलरसिद्धान्तेन—

र = छे (य+च) = फ (य) + $फ^{१}(य)\cdot च+फ^{॥}(य)\cdot\frac{च^२}{\lfloor २}+\cdots\cdot,$

अत्र यदि च = ०, तदा फ (य) = छेय ।

ततस्तात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{तार}{ताय}=\frac{स्पय\ (य+च)}{कोज्या\ (य+च)}=फ^{१}(य)+फ^{॥}(य)\cdot\frac{च}{२}+\cdots\cdot,$

अत्र यदि च = ० तदा $फ^{१}(य)=\frac{स्पय}{कोज्याय}$ = ज्याय · $छे^२य$,

पुनरस्य द्वितीयसम्बन्धग्रहणेन—

$\frac{ता^२र}{ताय^२}=$

$=\frac{छे^२(य+च)\cdot कोज्या\ (य+च)+ज्या\ (य+च)\cdot स्प\ (य+च)}{काज्या^२\ (य+च)}$

$=फ^{॥}(य)+\cdots\cdot,$

अत्र याद च = ० तदा—

$फ^{॥}(य)=\frac{छे^२य\cdot कोज्याय+ज्याय\cdot स्पय}{कोज्या^२य}=$

$\frac{छे^२य\circ कोज्याय}{कोज्या^२य}+\frac{ज्या^२य}{काज्या^२य}=छे^२य+ज्या^२य\cdot छे^२य=$

$=छे^२य\ (१+ज्या^२य)$, इत्यादि ।

स्वरूपे रैतैरुत्थापिते टेलरसिद्धान्ते—

छे (य+च) = छेय + $छे^२य\cdot ज्याय\cdot च+छे^२य\cdot(य+ज्या^२य)\cdot\frac{च^२}{\lfloor २}+\cdots\cdot$ इत्युत्तरम् ।

$$(४८)\ \text{छे}^{-१}(य+च)=\text{ज्या}^{-१}\frac{\sqrt{य^२-१}}{य}+\frac{च}{य\sqrt{य^२-१}}+$$

$$\frac{१-२य^२}{य^२\sqrt{य^२-१}}\cdot\frac{च^२}{\lfloor २}+\cdots\cdots,\ \text{इति कथम्}$$

अत्रोत्तरं पूर्वांकप्रश्नोत्तरावलोकनेन स्फुटं किमत्र लेखबाहुल्येनेति ।

$$(४६)\ \overline{\text{स्प}}^{१}(य+च)=\overline{\text{स्प}}^{१}य+च\cdot\text{ज्या}^{२}ष-\frac{च^२}{२}\cdot\text{ज्या}^{२}ष\cdot\text{ज्या}२ष$$

$$+\frac{च^३}{\lfloor ३}\cdot\text{ज्या}^{३}ष\cdot\text{ज्या}३ष-\frac{च^४}{४}\cdot\text{ज्या}^{४}ष\cdot\text{ज्या}\,४\,ष+\cdots\cdots$$

इति टेलरसिद्धान्तेन कथम् ?

अत्र टेलरसिद्धान्तेन—

$$\overline{\text{स्प}}^{१}(य+च)=\overline{\text{स्प}}^{१}य+च\cdot\frac{\text{ता}(\overline{\text{स्प}}^{१}य)}{\text{ताय}}+\frac{च^२}{२}\cdot\frac{\text{ता}^{२}(\overline{\text{स्प}}^{१}य)}{\text{ताय}^{२}}+$$

$$\frac{\text{ता}^{३}(\overline{\text{स्प}}^{१}य)}{\text{ताय}^{३}}\cdot\frac{च^३}{\lfloor ३}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

अत्र $फ(य)=\overline{\text{स्प}}^{१}य$, अतः $फ'(य)=\frac{१}{१+य^२}$,

परञ्चात्र $ष=\frac{\pi}{२}-\overline{\text{स्प}}^{१}य$, $\therefore\ \overline{\text{स्प}}^{१}य=\frac{\pi}{२}-ष$, अतः

$$\text{स्प}\left(\frac{\pi}{२}-ष\right)=य=\text{कोस्प}ष=\frac{\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}},\ \text{अतः}$$

$$१+\text{कोस्प}^{२}ष=\text{कोछे}^{२}ष=\frac{१}{\text{ज्या}^{२}ष}=१+य^२,\ \text{अतः}$$

$$\frac{१}{१+य^२}=\text{ज्या}^{२}ष,\ \text{अतः}\ फ'(य)=\text{ज्या}^{२}ष\ ।$$

पुनरन्यतात्कालिकसम्बन्धग्रहणेन—

$$फ''(य)=-\frac{२य}{(१+य^२)^२}=-२य\cdot\text{ज्या}^{२}ष\ ।$$

परञ्चपूर्वं $य=\frac{\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}$, अतः $फ''(य)=-२\times\frac{\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\cdot\text{ज्या}^{२}ष=$

-२ कोज्याष $\cdot$ ज्याष $\cdot$ ज्या$^{२}ष=-$ ज्या$२ष\cdot$ ज्या$^{२}ष$,

पुनस्तृतीयसम्बन्धग्रहणेन—

$$फ'''(य)=\frac{-२(१+य^२)^२+२(१+य^२)\times२य\times२य}{(१+य^२)^४}=$$

$$\frac{-२(१+य^२)+८य^२}{(१+य^२)^३}=\left\{\frac{-२-२\,\text{कोज्या}^{२}ष}{\text{ज्या}^{२}ष}\cdot८+\right.$$

$$\left.\frac{\text{कोज्या}^{२}ष}{\text{ज्या}^{२}ष}\cdot=\right\}\times\text{ज्या}^{६}ष=$$

$$(-२\,\text{ज्या}^{२}ष-२\,\text{कोज्या}^{२}ष+८\,\text{कोज्याष})\,\text{ज्या}^{४}ष=$$

$$\left\{-२\,\text{ज्या}^{२}ष-२(१-\text{ज्या}^{२}ष)+८(१-\text{ज्या}^{२}ष)\right\}\cdot\text{ज्या}^{४}ष=$$

$$\left\{-२+८-८\text{ज्या}^{२}ष\right\}\cdot\text{ज्या}^{४}ष=\left(६-८\text{ज्या}^{२}ष\right)\cdot\text{ज्या}^{४}ष+$$

$$\left(६\,\text{ज्याष}-८\,\text{ज्या}^{३}ष\right)\cdot\text{ज्या}^{३}ष=२\left(३\text{ज्याष}-४\text{ज्या}^{३}ष\right)\cdot\text{ज्या}^{३}ष=$$

२ ज्या३ष $\cdot$ ज्या$^{३}ष$, पुभिरुत्थापिते सर्वमुत्पद्यते ।

अत्रैव यदि $ष=\frac{\pi}{२}\cdot\overline{\text{स्प}}^{१}ष$, तदा $\overline{\text{स्प}}^{१}य=\text{कोज्याष}\cdot\text{ज्याष}+$

$$\frac{\text{कोज्या}^{२}ष\cdot\text{ज्या}२ष}{२}+\frac{\text{कोज्या}^{३}ष\cdot\text{ज्या}३ष}{३}+\cdots\cdots,\ \text{इति कथम् ?}$$

अत्र यदि $\overline{\text{स्प}}^{१}(य-च)=०$, इति कल्प्यते, तथा $च=य$ ।

तदा टेलरसिद्धान्तेन—

$$\text{स्प}(य-य)=\overline{\text{स्प}}^{१}य-य\cdot\text{ज्या}^{२}ष-\frac{य^२}{२}\cdot\text{ज्या}^{२}ष\cdot\text{ज्या}२ष$$

$$-\frac{य^३}{३}\cdot\text{ज्या}^{२}ष\cdot\text{ज्या}३ष-\frac{य^४}{४}\cdot\text{ज्या}^{४}ष\cdot\text{ज्या}४ष-\cdots\cdots,$$

अतः $\overline{\text{स्प}}^{१}\text{य} = \text{य} \cdot \text{ज्या}^{२}\text{प} + \frac{\text{य}^{३}}{३} \cdot \text{ज्या}^{२}\text{प} \cdot \text{ज्या}\,२\,\text{प} + \frac{\text{य}^{३}}{३} \cdot \text{ज्या}^{२}\text{प} \cdot \text{ज्या}\,३\,\text{प} + \cdots\cdots\cdots$,

परञ्चात्र $\text{प} = \frac{\pi}{२} - \overline{\text{स्प}}^{१}\text{य}$, अतः $\overline{\text{स्प}}^{१}\text{य} = \frac{\pi}{२} - \text{य}$,

अतः $\text{स्प}\left(\frac{\pi}{२} - \text{प}\right) = \text{य} = \text{कोस्पप} = \frac{\text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}$,

अतोऽत्र प्रथमपदस्वरूपम् $= \frac{\text{कोज्याप} \cdot \text{ज्या}^{२}\text{प}}{\text{ज्याप}} = \text{कोज्याप} \cdot \text{ज्याप}$,

द्वितीयपदे $\text{य}^{३} = \frac{\text{कोज्या}^{३}\text{प}}{\text{ज्या}^{२}\text{प}}$, अनेनोत्थापिते तदा

$\frac{\text{कोज्या}^{३}\text{प} \cdot \text{ज्या}\,२\,\text{प}}{२}$, इति भवेत् ।

एवं तृतीयपदस्वरूपम्— $\frac{\frac{\text{कोज्या}^{३}\text{प}}{\text{ज्या}^{२}\text{प}} \cdot \text{ज्या}^{३}\text{प} \cdot \text{ज्या}\,३\,\text{प}}{३}$

$= \frac{\text{कोज्या}^{३}\text{प} \cdot \text{ज्या}\,३\,\text{प}}{३}$, इति सर्वमुपपन्नम् ।

(४७) यदि $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ तदा $\text{फ}\left(\frac{९\text{य}}{५}\right) =$

$$\text{र} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{४\text{य}}{५} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{१६}{२५} \cdot \frac{\text{य}^{२}}{\lfloor २} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{६४}{१२५} \cdot \frac{\text{य}^{३}}{\lfloor ३} + \cdots\cdots$$

इति कथम् ?

टेलरसिद्धान्तेन—

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{च} \cdot \text{फ}^{\text{I}}(\text{य}) + \frac{\text{च}^{२}}{\lfloor २} \cdot \text{फ}^{\text{II}}(\text{य}) + \cdots\cdots,$$

अत्र यदि $\text{च} = \frac{४\text{व}}{५}$ तदा—

$$\text{फ}\left(\text{य} + \frac{४\text{य}}{५}\right) = \text{फ}(\text{य}) + \frac{४\text{य}}{५} \cdot \text{फ}^{\text{I}}(\text{य}) + \frac{\text{य}^{२}१६}{२५ \cdot \lfloor २} \cdot \text{फ}^{\text{II}}(\text{य}) + \cdots\cdots,$$

परञ्चात्र $\text{फ}(\text{य}) = \text{र}$ तदा प्रथमतात्कालिकसम्बन्धः

$= \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}^{\text{I}}(\text{य})$ । द्वितीयः $\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \text{फ}^{\text{II}}(\text{य})$,

अनेनोत्थाप्यते तदा—

$$\text{फ}\left(\text{य} + \frac{४\text{य}}{५}\right) = \text{र} + \frac{४\text{य}}{५} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \frac{१६\text{य}^{२}}{२५ \cdot \lfloor २} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} + \cdots\cdots,$$

वा $\text{फ}\left(\frac{९\text{य}}{५}\right) = \text{र} + \frac{४\text{य}}{५} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \frac{१६\text{य}^{२}}{२५ \lfloor २} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} + \frac{६४\text{य}^{३}}{१२५ \cdot \lfloor ३} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} + \cdots\cdots$ इत्युत्तरम् ।

(४८) $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ तथा $\text{स} = \text{फ}(\text{अ}-\text{य})$ तदा—

$$\text{र} = \text{स} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}(२\text{य}-\text{अ}) + \frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}}(२\text{य}-\text{अ})^{२} \cdot \frac{१}{\lfloor २} + \frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताय}^{३}} \cdot (२\text{य}-\text{अ})^{३} \cdot \frac{१}{\lfloor ३} - \cdots\cdots\cdots$$

इति कथं सिद्धयति ?

यतः $\text{अ}-\text{य} = \text{अ}-\text{य}+२\text{य}-२\text{य} = \text{अ}+\text{य}-२\text{य}$ अतः

$\text{अ}-(\text{अ}-\text{य}) = \text{य} = \text{अ}-(\text{अ}+\text{य}-२\,\text{य}) =$

$\text{अ}-\text{य}+२\,\text{य}-\text{अ} = (\text{अ}-\text{य})+(२\text{य}-\text{अ}) = \text{स}+\text{च}$ ।

अर्थादत्र $\text{अ}-\text{य} = \text{स}$, $२\,\text{य}-\text{अ} = \text{च}$, इति कल्प्यते ।

तदा टेलरसिद्धान्तेन—

$$फ(य)=फ(स+च)=फ(स)+फ^{।}(स)\cdot च+फ^{॥}(स)\cdot\frac{च^{२}}{\lfloor २}+\cdots\cdots\cdots=$$

$$फ(अ-य)+\frac{ताय}{ताय}(२य-अ)+\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}(२य-अ)^{२}+\cdots\cdots\cdots=$$

$$र=स+\frac{ताय}{ताय}(२य-अ)+\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}\left(\frac{२य-अ}{\lfloor २}\right)^{२}+\cdots\cdots\text{इत्युत्तरम् ।}$$

(४९) $\sqrt{य^{३}+१४य^{२}-२८८}$, इदं यदि टेलर सिद्धान्ते फ (य) कल्प्यते, ततः फ (य+च) अस्य मानमानीयते तदा य, केन सम्बं कृते टेलर सिद्धान्ते व्यभिचारो भवेत् ?

यदि $फ(य)=\sqrt{य^{३}+१४य^{२}-२८८}=(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}$

टेलरसिद्धान्तेन—

$$फ(य+च)=फ(य)+फ^{।}(य)\cdot च+फ^{॥}(य)\cdot\frac{च^{२}}{\lfloor २}+\cdots\cdots\cdots,\text{ इति}$$

परञ्च $फ^{।}(य)=३य^{२}+१४य\cdot२\times\frac{१}{२}(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{-\frac{१}{२}}$

अतः

$$फ(य+च)=(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}+\frac{३य^{२}+१४\times२य\cdot\frac{१}{२}}{(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}}=$$

$$(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}+\frac{२(३य^{२}+२८य)}{(य+१२)(य-४)(य+६)},$$

अत्र यदि य= −१२, तदा—

$$फ(य+च)=(य^{३}+४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}+\frac{२\times३\times१४४+२८\times१२}{(-१२+१२)(य-४)(य+६)}=$$

$$(य^{३}+१४य^{२}-२८८)^{\frac{१}{२}}+\frac{\text{संख्या}}{०}$$

अत्र द्वितीयपदस्यानन्तत्वाट् टेलरसिद्धान्तस्य व्यभिचारः ।

एवं य=४ अथवा य= −६ तदापि व्यभिचारोभवतीति ।

(९०) अस्मिन् समीकरणे $य^{५}-य=य^{४}+१९$, आसन्नमानेन य, अस्त्रोकमानं किम् ?

यतः $य^{५}-य=य^{४}+१९$, अतः $य^{५}-य-य^{४}-१९=०$, अन्वानुमीत्या य=२ इति कल्पितम् ।

तदा $फ(य)=य^{५}-य-य^{४}-१९=-१$,

तथा $फ^{।}(य)=५य^{४}-१-४य^{३}=४७$,

अत्र २९ प्रक्रमो विलोक्यः—

अतः $\frac{फ(य)}{फ^{।}(य)}=च=-\frac{१}{४७}$ । अतः य=क—

$$(-\frac{१}{४७})=२+\frac{१}{४७}\text{, इत्युत्तरम् ।}$$

(९१) $२य^{३}+३य^{२}+२य=८८$, अत्र य, अस्त्रोकमानं किम् ?

यतः $२य^{३}+३य^{२}+२य=८८$

अतः $२य^{३}+३य^{२}+२य-८८=०$,

अत्र यदि य=३ तदा—

$फ(य)=२य^{३}+३य^{२}+२य-८८=-१$,

फ^{1} (य) = ६ य^{२} + ६ य + २ = ७४ अतः

य = ३ − ($\frac{१}{७४}$) = ३ + $\frac{१}{७४}$, इत्युत्तरम् ।

(६२) एकं जात्यत्रिभुजमस्ति, यस्य क्षेत्रफलम् = ३० + $\frac{१}{२}$, भुजकर्णयोरन्तरम् = ८, तत्र कोटिकर्णयोर्मानेके ?

कल्प्यते भुजप्रमाणम् = य, तदा य · को · = ६१ ∴ को = $\frac{६१}{य}$ ।

तत्र कर्णः = य + ८, अतः (य + ८)^{२} − य^{२} = १६ य + ६४

= को^{२} । अतः $\frac{(६१)^{२}}{य^{२}}$ = १६ य + ६४ = $\frac{३७२१}{य^{२}}$,

अतः ३७२१ = १६ य^{३} + ६४ य^{२} ,

कल्प्यते फ (क) = १६ य^{३} + ६४ य^{२} − ३७२१ = ० ,

अतः फ^{1} (क) = ४८ य^{२} + १२८ य ,

अत्र यदि य = ९, तदा फ^{1} (क) = १२०० + ६४० = १८४० ,

अतः च = − $\left(-\frac{१२१}{१८४०}\right)$ = $\frac{१२१}{१८४०}$, अतो भुजमानम् = य =

९ + $\frac{१२१}{१८४०}$ = ,

यतः य · को · = ६१ अतः कोटिः = $\frac{य \cdot को}{य}$ = $\frac{६१}{९ + \frac{१२१}{१८४०}}$ =

१२ + $\frac{३८८}{९३२१}$ । कर्णः = य + ८ = ९ + $\frac{१२१}{१८४०}$ + ८ =

१३ + $\frac{१२१}{१८४०}$, स्वल्पान्तरादित्युत्तरम् ।

अत्रोदाहरणयोर्द्वयोरप्युत्तरं स्फुटं वर्त्तते । किमत्र ग्रन्थबाहुल्येन ।

इति दरभङ्गामण्डलान्तर्गत "जारिसो" ग्रामनिवासिना श्री अच्युतानन्दझा शर्मणा निर्मिते चलनकलनप्रश्नोत्तरविवरणे चतुर्थोध्यायः ।